

גורם אינטגרציה מהצורה $x^m y^n$.

דוגמה.

$$(2y^2 + 4x^2y) dx + (3xy + 2x^3) dy$$

. נסמן:

$$A(x, y) = 2y^2 + 4x^2y$$

$$B(x, y) = 3xy + 2x^3$$

$$A_y = 4y + 4x^2$$

$$B_x = 3y + 6x$$

$$\frac{B_x - A_y}{A} = \frac{6x - 4x^2 - y}{2y^2 + 4x^2y}$$

$$\frac{A_y - B_x}{B} = \frac{4x^2 - 6x + y}{3xy + 2x^3}$$

לכן, לא קיים גורם אינטגרציה f שתלוי ב x או y בלבד.

ננסה למצוא גורם אינטגרציה f מהצורה $x^m y^n$.

נכפיל את המשוואה ב $x^m y^n$ ונקבל משוואה חדשה

$$x^m y^n (2y^2 + 4x^2y) dx + x^m y^n (3xy + 2x^3) dy = 0$$

על מנת שהמשוואה הזאת תהיה מדוייקת, חייב להתקיים

$$\cdot \left((x^m y^n) (2y^2 + 4x^2y) \right)_y = \left(x^m y^n (3xy + 2x^3) \right)_x$$

נגזור ונשוו

$$\begin{aligned} \left((x^m y^n) (2y^2 + 4x^2y) \right)_y &= \left(2x^m y^{n+2} + 4x^{m+2} y^{n+1} \right)_y \\ &= 2(n+2)x^m y^{n+1} + 4(n+1)x^{m+2} y^n \end{aligned}$$

נגזור את האגד השני ונקבל:

$$\begin{aligned} \left(x^m y^n (3xy + 2x^3) \right)_x &= \left(3x^{m+1} y^{n+1} + 2x^{m+3} y^n \right)_x \\ &= 3(m+1)x^m y^{n+1} + 2(m+3)x^{m+2} y^n \end{aligned}$$

נשווה אגפים ונקבל:

$$2(n+2)x^m y^{n+1} + 4(n+1)x^{m+2} y^n = 3(m+1)x^m y^{n+1} + 2(m+3)x^{m+2} y^n$$

נשווה את הגורמים עם אותה חזקה ונקבל:

$$\begin{aligned}(2n + 4) x^m y^{n+1} &= (3m + 3) x^m y^{n+1} \\ (4n + 4) x^{m+2} y^n &= (2m + 6) x^{m+2} y^n\end{aligned}$$

נקבל:

$$\begin{aligned}2n + 4 &= 3m + 3 \\ 4n + 4 &= 2m + 6\end{aligned}$$

למשוואה פתרון יחיד ונקבל: $m = n = 1$.
נשים לב, שהמשוואה שמצאנו,

$$\begin{aligned}xy(2y^2 + 4x^2y)dx + xy(3xy + 2x^3) dy = \\ (2xy^3 + 4x^3y^2) dx + (3x^2y^2 + 2x^4y) dy = 0\end{aligned}$$

היא אכן מדוייקת:

$$\begin{aligned}(2xy^3 + 4x^3y^2)_y &= 6xy^2 + 8x^3y \\ &= (3x^2y^2 + 2x^4y)_x\end{aligned}$$

נפתור אותה:

$$\begin{aligned}F(x, y) &= \int 2xy^3 + 4x^3y^2 dx \\ &= x^2y^3 + x^4y^2 + h(y)\end{aligned}$$

נגזור לפי y ונשווה עם המקדם של dy על מנת למצוא את $h(y)$.

$$(x^2y^3 + x^4y^2 + h(y))_y = 3x^2y^2 + 2x^4y + h'(y) = 3x^2y^2 + 2x^4y$$

נקבל, $h'(y) = 0$ ולכן $h(y) = C$ (פונקציה קבועה).
הפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned}F(x, y) &= x^2y^3 + x^4y^2 + C = K \\ \Leftrightarrow F(x, y) &= x^2y^3 + x^4y^2 = C\end{aligned}$$