7 תרגול 7

הגדרה: מטריצה $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ תקרא אורתוגונלית אם: $A^*A=AA^*=I$. (למעשה, מספיק רק צד אחד במשוואה). בממשיים זה אומר: $AA^t=I$.

1. תהא Q או"ג אזי כל ע"ע שלה מקיים $|\lambda|=1$.
הוכחה: יהא $Qv=\lambda v$ עם vמנורמל אזי

$$1=\langle v,v\rangle=\langle Qv,Qv\rangle=\langle \lambda v,\lambda v\rangle=\lambda\cdot\overline{\lambda}=|\lambda|$$

2. נגדיר $V=\mathbb{R}_2[x]$ עם מ"פ $\langle f,g\rangle=\sum_{i=0}^{2}f(i)g(i)$.
   (א) הפכו את $\{1,x\}$ לאו"ג.
   פתרון:

$$\begin{aligned} w_1&=1\\ w_2&=x-\frac{\langle x,1\rangle}{\|1\|^2}1=x-\frac{3}{3}1=x-1 \end{aligned}$$

   (ב) מצאו $w\in W=span\,\{1,x\}$ הקרוב ביותר ל-x^2.
   פתרון: זה ההטלה שלו.

$$\begin{aligned} \pi_W(x^2)&=\frac{\langle x^2,1\rangle}{\|1\|^2}1+\frac{\langle x^2,x-1\rangle}{\|x-1\|^2}(x-1)\\ &=\frac{5}{3}1+\frac{4}{2}(x-1)\\ &=2x-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. הגדרת $W^\perp$ והוכה שהוא ת"מ.

4. תרגיל: יהי $\mathbb{R}^n$ עם המ"פ הסטנדרטית. תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה שמקיימת: $\langle v,u\rangle=0\Rightarrow\langle Av,Au\rangle=0$. הוכיחו: קיימים α ומטריצה אורתוגונלית O כך ש $A=\alpha O$.
פתרון: נשים לב כי תמיד מתקיים: $\langle A^tv,u\rangle=\left(A^tv\right)^tu=v^tAu=\langle v,Au\rangle$.
בנוסף, נשים לב ש- $a\in W^\perp$ אם ורק אם לכל $b\in W$ מתקיים $a\in\{b\}^\perp$.
כעת נוכל להוכיח שA^tA סקלרית. ובכן, לכל $v\in V$ מתקיים: $\langle v,u\rangle=0\Rightarrow$ $\langle A^tAv,u\rangle=\langle Av,Au\rangle=0$. נסמן: $span\{v\}^\perp=W$ אז נקבל שלכל $u\in W$ מתקיים $A^tAv\in span\{u\}^\perp$, וזה קורה אם ורק אם (כפי שראינו) $A^tAv\in W^\perp=$ $span\{v\}$. כלומר, $A^tAv=\alpha v$. קיבלנו שכל וקטור הוא וקטור עצמי של A^tA לע"ע α, ולכן המטריצה סקלרית. $A^tA=\alpha I$.
נשים לב כי $\alpha\geq 0$ כי $\alpha\langle v,v\rangle=\langle\alpha v,v\rangle=\langle A^tAv,v\rangle=\langle Av,Av\rangle=\|Av\|^2$ ואז $\alpha=\frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2}\geq 0$.
אם $\alpha=0$ אזי $\|Av\|=0$ ואז $Av=0$ ואז $A=0$ ונוכל להגדיר $A=0\cdot I$.

אם $\alpha > 0$ נגדיר $O = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}A$ היא מטריצה אורתוגונלית כי $O^tO = \left(\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}A\right)^t \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}A =$ $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}A^t\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}A = \dfrac{1}{\alpha}A^tA = \dfrac{1}{\alpha}\alpha I = I$. ונקבל: $A = \sqrt{\alpha}O$ כנדרש.

5. הוכיחו את הטענות הבאות: עבור V ממ"פ

(א) אם V ממימד סופי אזי לכל $W \leq V$ מתקיים $(W^\perp)^\perp = W$.

(ב) לכל שני תתי מרחבים U, W מתקיים $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

(ג) אם V ממימד סופי אזי לכל שני תתי מרחבים U, W מתקיים$(U \cap W)^\perp =$ $U^\perp + W^\perp$.

(ד) אם $A \subseteq B$ אז $B^\perp \subseteq A^\perp$.

הוכחה:

(א) בהרצאה.

(ב) $(\subseteq)$: $U, W \subseteq (U+W)$ ולכן $(U+W)^\perp \subseteq U^\perp, W^\perp$ ולכן גם בחיתוך .
$(\supseteq)$: יהי $v \in U^\perp \cap W^\perp$ ויהי $u + w \in U + W$. אזי, $\langle v, u+w\rangle =$ $0 = 0 + 0 = \langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle$. כלומר, $v \in U + W)^\perp$.

(ג) מסקנה מ 1+2 . $(U^\perp + W^\perp)^\perp = (U^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp = U \cap W$ נפעיל ניצב על שני הצדדים ונקבל $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

(ד) יהי $v \in B^\perp$, ויהי $a \in A$ צ"ל: $\langle v, a\rangle = 0$, ואכן $a \in A \subseteq B$ ולכן $a \in B$ וכיון ש־ $v \in B^\perp$ נקבל $\langle v, a\rangle = 0$.

6. (בהרצאה) תרגיל: תהי $A \in \mathbb{R}^n$. אזי, $N(A) = R(A)^\perp$.
הוכחה: $N(A) = \{v : Av = 0\}$.
$v \in N(A) \iff Av = 0 \iff \forall i \in \{1, ..., n\}, (Av)_i = 0.$ בנוסף,
$(Av)_i = R_i(Av) = R_i(A)v = \langle R_i(A), v\rangle$.
כלומר, $v \in N(A) \iff \forall i, \langle R_i(A), v\rangle = 0 \iff v \in \{R_1(A), \ldots, R_m(A)\}^\perp =$ $R(A)^\perp$.

7. הסימטריות ניצבות לאנטי סימטריות בסטנדרטית. קיבלנו פירוק ניצב.
הוכחה: תהיינה A סימטרית ו־B אנטי־סימטרית, אזי נקבל: $\langle A, B\rangle = tr(AB^t) =$ $tr(A(-B)) = -tr(AB) = -tr(BA) = -tr(BA^t) = -\langle B, A\rangle = -\langle A, B\rangle$.