לינארית 2 שיעורי בית

שיעורי בית מספר 1

1. מצאו ע"ע ורחבים עצמיים של $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. קבעו האם היא לכסינה ובמידה וכן מצאו מטריצה מלכסנת וצורה אלכסונית שהיא דומה לה.פתרון : חישוב הפ"א

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ -2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} =$$

$$(\lambda{+}1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda{+}1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda{+}1)^2\lambda^2$$

מ"ע:

$$V_0 = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$V_{-1} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

לכן יש בסיס של ו"ע ואם נגדיר $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ היא תהיה מטריצה מלכסנת ו $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

2. תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ דומות. הוכיחו:

(א) $\det A=\det B$.

(ב) $tr(A)=tr(B)$.

(ג) המטריצות A^t,B^t דומות.

פתרון : לפי נתון, קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP=B$ ואז

(א) $\det B=\det P^{-1}AP=\det P^{-1}\cdot\det A\cdot\det P=\det A$.

(ב) נשתמש בכך ש $tr(M_1M_2)=tr(M_2M_1)$ ונקבל כי $tr(B)=tr(P^{-1}AP)=tr(APP^{-1})=tr(A)$

(ג) נשחלף את שני הצדדים ונקבל $B^t=\left[P^{-1}AP\right]^t=P^tA^tP^{-t}$ ולכן A^t דומה ל B^t ע"י המטריצה P^{-t}

3. ראיתם כי יחס דימיון מטריצות על $\mathbb{F}^{n\times n}$ הוא יחס שקילות. מצאו מטריצה $A\neq 0,I$ כך שבמחלקת השקילות שלה יש מטריצה אחת (כלומר ש A היא המטריצה היחידה שדומה לעצמה).

פתרון : נראה שכל מטריצה סקלארית αI היא דוגמא לשאלה. אכן, לכל P הפיכה מתקיים כי $P^{-1}\cdot\alpha I\cdot P=\alpha P^{-1}\cdot P=\alpha I$ לכן αI היחידה שדומה לעצמה.

4. הוכיחו כי כל מטריצה משולשית עליונה דומה למטריצה משולשית תחתונה (וגם להיפך).

הדרכה: העיזרו ב $P=\begin{pmatrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

פתרון : תהא $U\in\mathbb{F}^{n\times n}$ משולשית עליונה. נשים לב כי $P^{-1}=P$ ונראה כי PUP משולשית תחתונה. אכן לכל $i<j$ מתקיים כי

$$\begin{aligned}[PUP]_{i,j}&=\sum_{k=1}^{n}(PU)_{i,k}P_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}P_{i,s}U_{s,k}P_{k,j}\\&=P_{i,n+1-i}U_{n+1-i,n+1-j}P_{n+1-j,j}=U_{n+1-i,n+1-j}=0\end{aligned}$$

5.

(א) תהיינה A,B דומות. ראינו שיש להם אותו פ"א ולכן אותם ע"ע. הוכיחו כי לכל ע"ע λ של שתיהן מתקיים כי הר"ג של λ כע"ע של A שווה לר"ג של λ כע"ע של B. כלומר הראו כי $\dim N(A-\lambda I)=\dim N((B-\lambda I))$

פתרון : נחשב לפי משפט הדרגה:

$$\dim N(A-\lambda I)=\dim N(P^{-1}BP-\lambda I)=\dim N(P^{-1}(B-\lambda I)P)=n-rank(P^{-1}(B-\lambda I)P)\overset{*}{=}n-rank((B-\lambda I))$$

כאשר מעבר $*$ נובע מכך שהכפלה במטריצה הפיכה לא משנה את הדרגה.

(ב) קבעו מי מהמטריצות הבאות דומות

$$A_1=\begin{pmatrix}2&1&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&5&\\&&&&5\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}2&&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&5&\\&&&&5\end{pmatrix},,A_3=\begin{pmatrix}2&&&&\\&2&&&\\&&2&1&\\&&&5&\\&&&&5\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}2&&&&\\&2&&&\\&&2&&\\&&&5&\\&&&&5\end{pmatrix},A_5=\begin{pmatrix}2&&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&5&1\\&&&&5\end{pmatrix}$$

פתרון : מחישוב ישיר רואים כי

i	$\dim N(A_i - 2I)$	$\dim N(A_i - 5I)$
1	1	2
2	2	2
3	3	2
4	3	2
5	2	1

לפי סעיף קודם A_1, A_2, A_3, A_5 לא דומות אחת לשניה כי הר"ג לא נשמרים.
בנוסף A_3, A_4 לכסינות כי הפ"א מל"ל (הוא $(x-2)^3 (x-5)^2$) ולכל ע"ע הר"א שווה לר"ג . והם דומות לאותה מטריצה אלכסונית (שעל אלכסונה $2,2,2,5,5$)

6. תהא $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ שדומה למטריצה האלכסונית $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix}$. חשבו את A^{100}.

פתרון : קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = D$ או בהעברת אגפים $A = PDP^{-1}$ ולכן

$$A^{100} = \left[PDP^{-1}\right]^{100} = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^{100}P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

.

7. נגדיר סדרת מספרים בצורה רקורסיבית:

$$\begin{aligned} a_{-1} &= -1 \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ \forall n \geq 2 \ a_n &= -2a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3} \end{aligned}$$

(א) הגדירו A המקיימת $\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.

פתרון : לפי הגדרה

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

תקיים את השיוון הדרוש.

(ב) לכסנו את A כדי למצוא ביטוי מפורש ל a_n (עבור $n \geq 2$). הדרכה: שימו לב כי $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix} A^{n-1} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.

פתרון : נמצא פולינום אופיני

$$p_A(x) = \left|\begin{pmatrix} x+2 & -1 & -2 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ x-1 & x & 0 \\ x-1 & -1 & x \end{pmatrix}\right| = (x-1)\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix}\right| =$$

$$= (x-1)\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix}\right| = (x-1)(x+1)(x+2)$$

ולכן $\{-1, 1, -2\}$ הם הע"ע של A. ו"ע:

עבור $\lambda = -1$

$$A+I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{-1} = \left\{\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda = 1$

$$A-I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_1 = \left\{\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda = -2$

$$A+2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{-2} = \left\{\begin{pmatrix} 4t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ולכן אם נגדיר $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ נקבל כי $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ולכן $A = PDP^{-1}$ ולכן $A^n = PD^nP^{-1}$ לכל n טבעי

ולכן

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix} = PD^{n-1}P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -9\,(-1)^{n-1} \\ 4\,(-2)^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 - 9\,(-1)^{n-1} + 16\,(-2)^{n-1} \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

ולכן

$$a_n = \frac{1}{6}\left(-1 - 9\,(-1)^{n-1} + 16\,(-2)^{n-1}\right) = \frac{1}{6}\left(-1 + 9\,(-1)^n + (-2)^{n+3}\right)$$

לכל $n \geq 2$.