(1) 24.11.13
אנליזה פונ'
הרצאה 7

לא כל קבוצה היא מדידה.

דוגמא לקבוצה לא מדידה:

$A\subset[0,1]$ α,β שקולים $\alpha\sim\beta$ (*)

אם $\alpha-\beta\in\mathbb{Q}$ (ההפרש רציונלי)

(*) $\sim$ יחס שקילות   יחס בין 2 מספרים כך ש:

דברים שמתקיימים:
- $\alpha\sim\alpha$ כל מס' שקול לעצמו
- $\alpha\sim\beta \Rightarrow \beta\sim\alpha$ יחס סימטרי
- $\alpha\sim\beta,\ \beta\sim\gamma \Rightarrow \alpha\sim\gamma$ טרנזיטיבי

יחס שקילות מחלק את הקבוצה $[0,1]$ למחלקות שקילות

מחלקת שקילות של α - $[\alpha]$ - כל האיברים ששקולים לα

ניתן לבדוק ש $\alpha-\beta$ הוא אכן יחס שקילות (שמקיים את 3 התכונות הנ"ל)
[למשל $\alpha-\beta\le 4$ לא יחס שקילות כי $4\sim 0$, $8\sim 4$ אבל 0 לא שקול ל8]

- $[0,1]$, $\sim_{\mathbb{Q}}$ מגדיר מחלקת שקילות

נבנה קבוצה A ע"י בחירת נציג מכל מחלקת שקילות

למשל $\mathbb{Q}\cap[0,1]=C[0]$ - מחלקת שקילות, ולכן בA יש איבר יחיד רציונלי

כל מחלקת שקילות היא בת מנייה.

המחלקות שקולות לכל ההזזות של מס' רציונלי שנמצאות בקטע $[0,1]$ (חיבור/חיסור של מס' רציונלי לα)

$[[\alpha]]=(\alpha+\mathbb{Q})\cap[0,1]$ מחלקת שקילות

$\{\alpha+q : q\in\mathbb{Q}\}$ מס' רציונלי

כל מחלקה היא בת מנייה.

טענה: A לא מדידה (לא מדידה לפי המידה שהגדרנו)

טענה: אם קבוצה B מדידה, אז גם כל הזזה שלה $B+\tau$ מדידה, ובעלת אותה מידה. [את הטענה הזו לא נוכיח].

- אנחנו משתמשים פה בסיגמא אדיטיביות - ~~סכום של מידות~~ מידה של איחוד = סכום המידות
- אינווריאנטיות של המידה

הוכחה: נניח בשלילה ש A מדידה. כלומר $m(A)\ge 0$.

- אם $m(A)=0$ אז גם $m(A+q)=0$ לכל q.

אבל $[0,1]\subset\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(A+q)$ [אם לוקחים נציג מכל מחלקה (A) ומוסיפים q, מכסים את הכל.]

ולכן $\sum m(A+q)\overset{\text{מונוטוניות}}{\ge} 1$ האיחוד $A+q$ מכסה את הקטע $[0,1]$ אם הוא מכסה את הקטע, ממונוטוניות הוא צריך להיות גדול מ1.

אבל $\sum m(A+q)=\sum m(A)=0$ $\le m\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(A+q)\right)$

$\Leftarrow$ סתירה!

② 24.11.13

[illegible]

אם מחלקה יש חיתוך
רק נציג אחד.
ולכן איחוד של ב הנציגים
ניתן קבוצה ריקה:

$x\in A+q_1 \Rightarrow \alpha\in A: x=\alpha+q_1$

$x\in A+q_2 \Rightarrow \beta\in A: x=\beta+q_2$

$\alpha-\beta=q_2-q_1\in\mathbb{Q}$

$\downarrow$

$\alpha\sim\beta$

בסתירה לבניה של A
שבוחרת נציג אחד מכל
מחלקת שקילות

• אם סופי $m(A)$, נשים לב ש $(A+q_1)\cap(A+q_2)=\emptyset$ לכל $q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$

לכן $m\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} A+q\right)=\underbrace{\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} m(A+q)}_{c}=\infty$

מצד שני: $\bigcup_{q\in[0,1]}(A+q)\subset[0,2]$

סתירה!

הגדרה: מרחב X. מידה נקראת <u>סופית</u> (על X) אם $m(X)<\infty$.

לדוגמא - מידת לבג על $[0,1]$.

מידה נקראת <u>σ-סופית</u> אם ניתן לכתוב $X=\bigcup_n X_n$, כך ש $m(X_n)<\infty$

דוגמא: מידת לבג על $\mathbb{R}$ (מרחב קשר) : $\mathbb{R}=\bigcup_n[-n,n]$ או $\mathbb{R}=\bigcup[n,n+1]$

עבור כל קבוצה $m(X_n)<\infty$, עבור $\mathbb{R}$ המידה לא סופית.

אפשר לכסות את $\mathbb{R}$ באיחוד של קטעים סופיים.

<u>דוגמא למידה לא σ סופית</u>: על $\mathbb{R}$ $m(A)=\begin{cases}\#A & A \text{ סופית}\\ \infty & \text{אחרת}\end{cases}$, $m(\{x\})=1$

לכל נק' נותנים מידה 1

א"א לכתוב את $\mathbb{R}$ כאיחוד של קבוצות עם מידות סופיות

[גם המידה של המרחב סופית, ניתן לנרמל ולהפוך למידת הסתברות]

פונקציות מדידות

פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת מדידה, אם $f^{-1}(A)$ מדידה לכל קבוצת בורל A

$\{x\in A: f(x)\in A\}$

[תזכורת: f רציפה, אם $f^{-1}(U)$ פתוחה לכל קבוצה פתוחה U]

σ-אלגברת בורל ($\mathcal{B}$) היא ה-σ אלגברה שנוצרת מהקטעים (a,b).
קבוצה היא בורל אם היא שייכת ל-$\mathcal{B}$.

הגדרה: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, נקראת בורל (או מדידה בורל) אם $f^{-1}(A)$ היא
קבוצה בורל לכל קבוצת בורל A.

כל פונ' מדידה בורל היא מדידה. כל פונקציה רציפה היא בורל.

(3) 24.11.13

אנליזה פונ'

הרצאה 4

[אם יש קבוצה שמוכלת בσ אלגברה שנוצרת מ f רציפה
אז ב-f^{-1} נקבל σ אלגברה שבתמונה של הפונ' ההפוכה]

<u>טענה:</u> אם f בורל, ו g מדידה אז מדיד - $f\circ g$ $\qquad f\circ g(x)=f(g(x))$

<u>הוכחה:</u> תהי A בורל. צריך להראות ש $(f\circ g)^{-1}(A)$ מדידה. $\qquad (f(g(\cdot)))^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\
x & g(x) & f(g(x))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
g^{-1}(f^{-1}(A)) & f^{-1}(A) \arrow[l, "g^{-1}"'] & A \arrow[l, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

בורל (A)

בורל ($f^{-1}(A)$) (המקור של קבוצת בורל הוא בורל)

מדידה ($g^{-1}(f^{-1}(A))$) כי המקור של קבוצת בורל מדידה

פונ' נקראת מדידה אם $f^{-1}(A)$ מדידה לכל קבוצת בורל A

<u>מסקנה:</u> אם f מדידה אז f^2 מדידה
$f+c$ מדידה

<u>הערה:</u> אם f,g בורל אז $f\circ g$ בורל

• הבעיה כדי להראות שפונ' מדידה צריך לבדוק עבור כל הקבוצות את התנאי.

<u>טענה:</u> f מדידה אמ"מ $\{x : f(x) \underset{\substack{\geq \\ < \\ \leq}}{>} c\}$ מדידה לכל c

$$\| $$
$$f^{-1}((c,\infty))$$

<u>הוכחה:</u> σ אלגברת בורל נוצרת מהקרניים $\{(c,\infty)\}_c$

נרצה להראות שאוסף הפונקציות המדידות סגור תחת כל מיני פעולות.

<u>משפט:</u> אם f,g מדידות, c,k קבועים אז:

א. $f+k$, cf מדידות

ב. $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ מדידות

ג. אם $g\neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ מדידה.

<u>הוכחה:</u> א. קל, נובע מהמשפט על ההרכבה, או ישירות

$$\{x : c\,f(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \frac{\alpha}{c}\} \Rightarrow$$

קבוצה מדידה כי f מדידה
ואז גם הקבוצה בתחילת השוויון מדידה

ב. • $f+g$, $f-g$

$\{x : f(x) > g(x)\}$ מדידה כי:

$$\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{x : f(x) > q ,\ g(x) < q\}$$

ש 24.11.13
אינפי 3 פתק
הרכבה 7

$$\{x: f(x) > g(x)\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{x: f(x) > q,\ g(x) < q\}$$

$$= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (\underbrace{\{x: f(x) > q\}}_{\text{מדידה}} \cap \underbrace{\{x: g(x) < q\}}_{\text{מדידה}})$$

איחוד בן מנה

$\Downarrow$

מדידה.

$$\{x: f(x) > g(x)\} = \{x: f(x) - g(x) > 0\}$$

$$\{x: f(x) - g(x) > c\} = \{x: f(x) > (g(x) + c)\} \quad \text{מדידה}$$

$\Leftarrow$ $f-g$ מדידה

מכיוון ש $-g = (-1)\cdot g$ גם כן מדידה (צ"ל), קיבלנו ש $f+g$ מדידה.

- כדי להראות ש $f\cdot g$ מדידה, נרשום:

$$\underbrace{(f+g)^2}_{\text{מדידה}} = \underbrace{f^2}_{\text{מדידה}} + 2fg + \underbrace{g^2}_{\text{מדידה}}$$

ממשפט ההרכבה, אם f מדידה גם f^2 מדידה.
ו f, g, $f+g$ מדידה

ונקבל:
$$f\cdot g = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$$

$\Downarrow$

מדידה

כפי ראינו ש f, g, $f+g$ מדידות
(הרכבה (בריבוע) נשאר מדיד)

- **משפט:** אם f_n מדידות ! $f_n \to f$ נקודתית [$f_n(t) \to f(t)$ לכל t] אז f מדידה.

הוכחה:
$$\{x: f(x) < c\} = \bigcup_{k} \bigcup_{N} \bigcap_{n>N} \{f_n(x) < c - \tfrac{1}{k}\}$$

שוויון קבוצות

לכל x $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

בפרט $\forall k\ \exists N: \forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$

נראה ש $x \in \bigcup\bigcup\bigcap[\ \ ]$ אז $f(x) < c$

$f(x) < c$, לכן קיים k כך ש $f(x) < c - \frac{2}{k}$.

$f_n(x) \to f(x)$ ולכן יש N כך ש $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ $\forall n > N$

$$\Rightarrow f_n(x) < c - \frac{2}{k} + \frac{1}{k} = c - \frac{1}{k} \quad \forall n > N$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{n>N} \{x: f_n(x) < c - \tfrac{1}{k}\}$$

כיוון שני - תרגיל

כ-אינפי Q

(5) 24.11.13

הגדרה: שתי פונקציות נקראות שקולות אם $\{x: f(x) \neq g(x)\}$ היא ממידה 0 ונסמן ~

תרגיל

הגדרה: תכונה שמתקיימת מחוץ לקבוצה ממידה 0, נקראת מתקיימת כמעט בכל מקום (או כמעט תמיד).

$f \sim g$ אם הן מזדהות כמעט בכל מקום

דוגמה: פונקצית דיריכלה $D(x)=\begin{cases}0 & x\in \mathbb{Q}\\ 1 & x\notin \mathbb{Q}\end{cases}$ שקולה לפונ' הקבועה 1

הערה: אם $f \sim g$, f,g רציפות אז $f=g$ (פונ' רציפות לא יכולות להיות שונות בנק' אחת)

הגדרה: נגיד ש $f_n \xrightarrow{\text{כ.ב.מ}} f$ כמעט בכל מקום אם $\{x: f_n(x) \not\to f(x)\}$ ממידה 0.

$f_n(x) = (-x)^n$ על $[0,1]$

ב $x=1$ לא מתכנס $(\pm 1 \ldots)$

אבל $f_n(x) \to 0$ כמעט בכל מקום

משפט: אם f_n מדידות ו $f_n \to f$ כמעט בכל מקום אז f מדידה

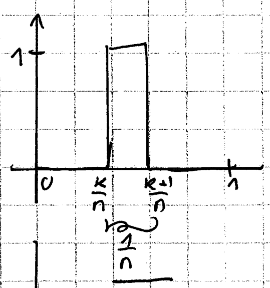
[תזכורת - מידת לבג היא שלמה - כל קבוצה ממידה 0 היא מדידה]

~~**הגדרה:** נאמר ש f_n (מדידות) מתכנסות במידה לפונקציה מדידה f~~

הגדרה: יהיו f_n, f מדידות. נאמר ש f_n מתכנסות במידה ל f. $f_n \xrightarrow{\text{מידה}} f$

אם לכל $\varepsilon>0$, $\lim_{n\to\infty} m(\{x: |f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\})=0$

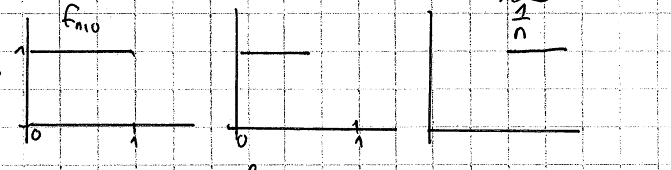
דוגמה:



(*) $0<\varepsilon<1$ $\quad m(\{x: f_{n,k}(x)>\varepsilon\}) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(**) $\forall x \ \forall N \ \exists n>N, k<n: f_{n,k}(x)=1$

~~$0<\varepsilon<1, m\{x: f_{n,k}(x)>\varepsilon$~~



כל נק' בקטע $[0,1]$ תכוסה אינסוף פעמים

מ (*): $f_{n,k}$ מתכנס במידה ל 0 $\quad f_{n,k} \xrightarrow{\text{במידה}} 0$

מ (**): $f_{n,k}(x) \not\to 0$ לכל $x\in[0,1]$

סדרת פונ' שמתכנסת במידה אבל לא מתכנסת באף נקודה.

13.11.24 (6)

משפט: אם $f_n \to f$ כמעט בכל נקודה אז $f_n \to f$ במידה
במידה סופית
(אם f_n, f מדידות)

הוכחה: נסמן $A=\{x: f_n(x)\not\to f(x)\}$, $m(A)=0$

בהינתן $\varepsilon>0$ נסמן: $B_N=\{x: \exists n>N\ |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}$

כל ה-x שעבורם $|f_n(x)-f(x)|$ רחוק מ-ε

$\bigcap B_N \subset A$, $B_N \supset B_{N+1}$

סדרה יורדת. (אם קיים מרחק, מספיק קיים מרחק)

כל ה-x שבשבילם B_N, ε מתקיים

סדרה יורדת שהחיתוך שלה מוכל ב-A ולכן:

$$\lim_{N\to\infty} m(B_N) = m\left(\bigcap B_N\right) \quad (*)$$

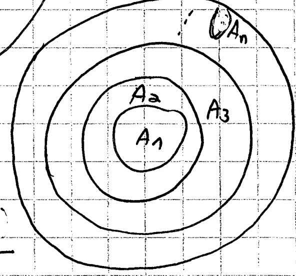
רציפות

$$\{x: |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\} \subset B_n$$

נוכיח את (*):

$$m\left(\bigcap B_n\right) = \lim m(B_n)$$

$\bigcap_{n} B_n \subset B_m\ \forall m$, $m\left(\bigcap B_n\right)\le m(B_m)\ \forall m$



סדרה יורדת –

סדרה עולה –

$A_n\uparrow$ (סדרה עולה) , $A_n\subset A_{n+1}$ $\quad m\left(\bigcup A_n\right)=\lim m(A_n)$

$$A_{n+1}=A_n\cup(\underbrace{A_{n+1}\setminus A_n}_{B_n})$$

$$m\left(\bigcup_{n=1} A_n\right)=m\left(\bigcup B_n\right)=\sum_{n=1} m(B_n)= \lim_{n\to\infty}\sum m(B_k)=\lim_{n\to\infty}$$

המידה של האיחוד היא המידה של האיחוד הזר של B_n

$$m(A_n)=\sum_{k=1}^{n} m(B_n)$$

$$A_n=\bigcup_{k=1}^{n} B_n$$

במקרה של חיתוך נעבור ע"י חוקי דה מורגן,

$A_n = B_n^c$, $A_n\uparrow$ סדרה עולה , $\underset{1-m(\bigcap B_n)}{m\left(\bigcup A_n\right)} = \lim \underset{1-B_n}{m(A_n)}$