פיתרון תרגיל מספר 6:

תשובה 1:

עפ"י הנתון $\lambda = 30$ בשעה

א. $X \sim P(\lambda = 2.5)$ ב-5 דקות

$$P(X \geq 4) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\right) =$$
$$= 1 - \left(\frac{e^{-2.5}2.5^0}{0!} + \frac{e^{-2.5}2.5^1}{1!} + \frac{e^{-2.5}2.5^2}{2!} + \frac{e^{-2.5}2.5^3}{3!}\right) = 0.2433$$

ההסתברות שבמשך 5 דקות ייכנסו לפחות 4 אנשים היא: 0.2433

ב. $X \sim P(\lambda = 5)$ ב- 10 דקות

$$P(X \geq 4) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\right) =$$
$$= 1 - \left(\frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!} + \frac{e^{-5}5^2}{2!} + \frac{e^{-5}5^3}{3!}\right) = 0.735$$

ההסתברות שבמשך 10 דקות ייכנסו לפחות 4 אנשים היא: 0.735

ג. $X \sim P(\lambda = 30)$ בשעה לכן $X \sim P(\lambda = \frac{1}{2})$ בדקה ומכאן ש $X \sim P(\lambda = \frac{N}{2})$ ב- N דקות

לפי נוסחה לתוחלת של התפלגות פואסון: $E(X) = \lambda = \frac{N}{2}$

תשובה 2:

$Z \sim P(\lambda + \mu)$.

עבור כל $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k \mid Z = n) = \frac{P(X = k, Y = n-k)}{P(Z = n)} = \frac{P(X = k)P(Y = n-k)}{P(Z = n)} =$$
$$= \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \binom{n}{k}\frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

לכן ההתפלגות המותנה של X היא $B\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$. בשיוויון השני השתמשנו באי תלות בין X ל Y

תשובה 3:

בסיס האינדוקציה $r=1$ טריוויאלי. נניח נכונות עבור $X_1,\cdots,X_{r-1}$ ונוכיח עבור $X_1,\cdots,X_r$.

$$P(X_1,\cdots,X_r=n)=\sum_{m=0}^{n}P(X_1,\cdots,X_{r-1}=m,X_r=n-m)=$$

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{e^{-(r-1)\lambda}((r-1)\lambda)^m}{m!}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-m}}{(n-m)!})=\frac{e^{-r\lambda}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}((r-1)\lambda)^m\lambda^{n-m}=$$

תשובה 4:

א. נגדיר מ״מ X – מספר התקלות במשך יום אחד:

$$X\sim Pois(\mu=5)\Rightarrow$$

$$P(X\geq 1)=1=P(X=0)=1-e^{-5}*\frac{(5)^0}{0!}=0.9932$$

ב. נגדיר מ״מ X_2 – מספר התקלות במשך יומיים:

$$X_2\sim Pois(\mu=5*2)\Rightarrow$$

$$P(X_2=0)=e^{-10}*\frac{(10)^0}{0!}$$

ג.נגדיר מ״מ Y– מספר ימי עבודה ״מוצלחים״ במשך חודש עבודה:

$$Y\sim Bin(n=25,p)$$

$$p=P(X\leq 1)=e^{-5}*\frac{(5)^0}{0!}+e^{-5}*\frac{(5)^1}{1!}=0.125$$

$$P(Y\geq 10)=\sum_{i=10}^{25}\binom{25}{i}0.125^i*0.875^{25-i}$$

תשובה 5:

א. יהי X מספר ההטלות . ויהי Y מספר הניצחונות של רינה עד להפסדה הרביעי (זכייתו הרביעית של יוסי). Y הוא מ"מ בינומי שלילי עם הפרמטרים 4 ו- $\frac{18}{38}$ (בהנחה כמובן שהשגחה היא הפסד). כמו כן מתקיים $Y=X-4$ ולכן ההסתברות שהמטבע יוטל 9 פעמים בסה"כ היא

$$P(X=9)=P(Y=4)=\binom{8}{3}\left(\frac{18}{38}\right)^4\left(\frac{20}{38}\right)^5\approx 0.1139$$

ב. יהי W שעות ההשגחה של יוסי. ויהי X מספר ההטלות שהתקיימו עד להפסדה הרביעי של רינה . מכיוון שרינה מפסידה 4 פעמים בסה"כ היא מנצחת $Y = X - 4$ פעמים (מ"מ בינומי שלילי עם הפרמטרים 4 ו- $\frac{18}{38}$).

$$W = (X - 4)\cdot 5 - 4\cdot 5 = 5Y - 20$$

לכן

$$E(W) = 5E(Y) - 20 = 5\cdot \frac{4(18/38)}{20/38} - 20 = 18 - 20 = -2$$

תשובה 6:

א) $P(X = 9) = (0.75)^8(0.25) = 0.02502$

ב)

$$P(X > 4) = 1 - \left[P(X = 4) + P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1)\right]$$
$$= 1 - (0.75)^3(0.25) - (0.75)^2(0.25) - (0.75)(0.25) - (0.25) = 0.5664$$

ג) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.25} = 4$