אנליזה ווקטורית

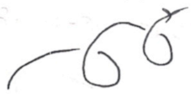
מה המטרה של הנושא?

החדו"א התפתח מתוך רצון לתאר תופעות פיסיקליות באמצעות מודל מתמטי ופיתרון באמצעות כלים מתמטיים מתוחכמים (נגזרות, אינטגרלים...)

המקרה הפשוט ביותר הוא שימוש במודל 1-מימדי - מתאר התופעה ע"י פונקציה במשתנה 1 $f(t)$

ניתן לתאר באופן זה - טמפרטורה בתלות בזמן
מרחק נסיעה "
ערך מניה "

פונקציות במימד 1 לא מספיקות - לדוגמא תיאור תנועת חלקיק במרחב



דורש פונקציה ווקטורית
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

בקורס זה נפתח כלים מתמטיים לניתוח מודלים ב-$\mathbb{R}^n$ ($n=2,3$) שמיוצגים ע"י פונקציות ווקטורים. התוצאות החשובות ביותר תהיינה משפטים אנלוגיים למשפט היסודי של החדו"א.

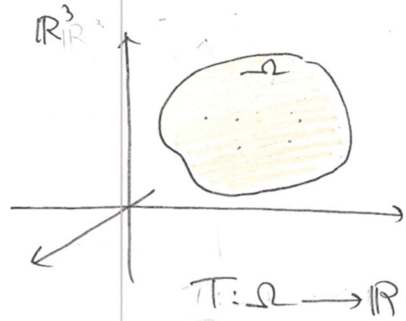
אנחנו לא נעסוק בבעיות התרגום של בעיה פיסיקלית למודל מתמטי אבל חשוב מאוד להכיר דוגמאות מרכזיות בשביל להבין את המוטיבציה לכל מה שנעסוק בו בהמשך.

האובייקטים הבסיסיים שיעזרו לנו לתאר תופעות הם **שדות סקלריים** ו**שדות ווקטוריים**.

שדה סקלרי - התאמה $F:\Omega\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
נקודה $\longrightarrow$ מספר

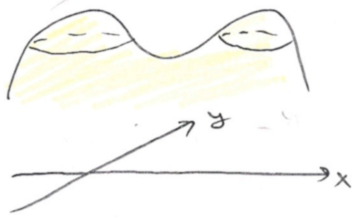
(במידת הצורך נדרוש $F\in C^k(\Omega)$
כלומר, F גזירה ברציפות עד סדר k)

דוגמאות: ① טמפרטורה
לחץ
לחות



$T:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$

②



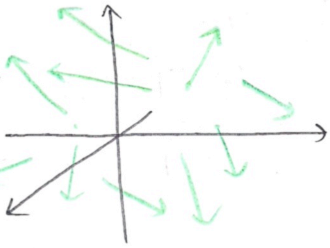
$u:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$
נקודה במפה $\longrightarrow$ גובה

שדה סקלרי הוא שם אחר לפונקציה שמטרתו להדגיש את ההבדלה והקשר למושג שדה וקטורי.

שדה וקטורי

התאמה $F:\Omega\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

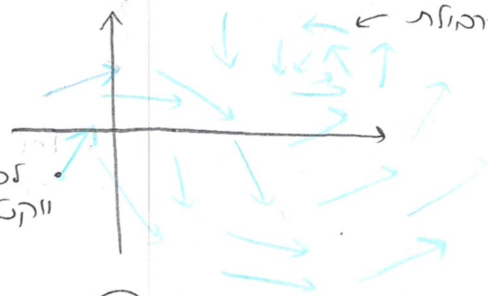
נק' $x\in\mathbb{R}^n \longrightarrow F(x)$ וקטור



מה שדה וקטורי ממדל?

① שדה מהירות של תנועת נוזל/גז

מערבולת ←

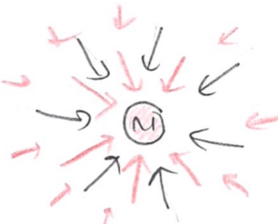


• לכל נקודה יש וקטור מהירות.

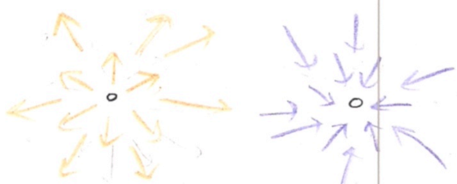
③

② שדה כוח - בכל נקודה הווקטור מציין את הכוח המופעל על הנק' באותה נקודה.

כוח כבידה



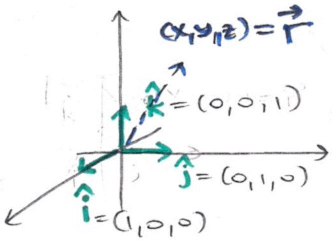
נקודות כאלו יופיעו במודלים של זרימת מיים, מטענים חשמליים



Source
מקור

Sink
חור ניקוז

רדיוס וקטור



שדה וקטורי מתואר באופן מתמטי ע"י **פונקציה וקטורית**

$F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z)=F(\vec{r})=(F_1(\vec{r}),F_2(\vec{r}),F_3(\vec{r}))=F_1\hat{i}+F_2\hat{j}+F_3\hat{k}$$

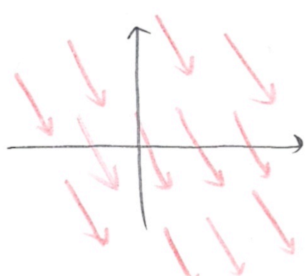
כיצד נבין איך נראה שדה וקטורי? כיצד נשרטט אותו?

במרבית המקרים - $F(x,y)=(\sin^2x+y)\hat{i}+\cos(x+y^2)\hat{j}$ ⇐ רק באמצעות מחשב.

אבל חשוב מאוד להכיר ולהבין את הדוגמאות הבסיסיות.

① $F(x,y)=\hat{i}-2\hat{j}=(1,-2)$

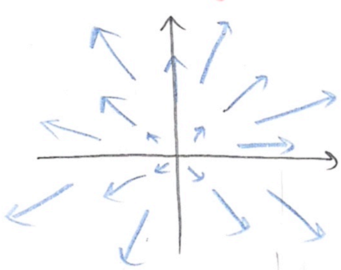
שדה וקטורי קבוע יכול לתאר זרם קבוע של מים/רוח



② $F(x,y)=x\hat{i}+y\hat{j}$

$F(\vec{r})=\vec{r}$

שדה וקטורי שיש לו "מקור" ב-0.



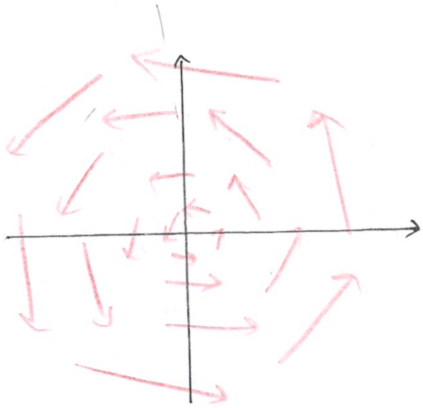
③ $F(x,y) = -y\hat{i} + x\cdot\hat{j}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$$

סיבוב של 90°

$$\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

= מטריצת סיבוב ב-90°

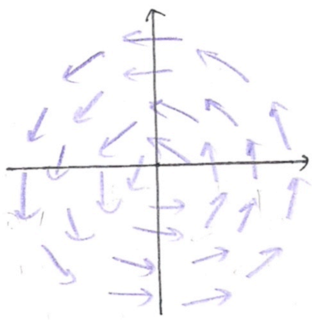


$$F(\vec{r}) = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\vec{r}$$

חלקיקים רחוקים מהראשית נעים "מהר" יותר אך המהירות הזוויתית קבועה.

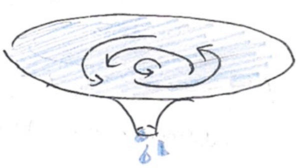
← מדמה "סיבוב" של המישור סביב 0.

④ סיבוב התנועה במהירות קבועה = 1 תתקבל ע"י השדה הוקטורי



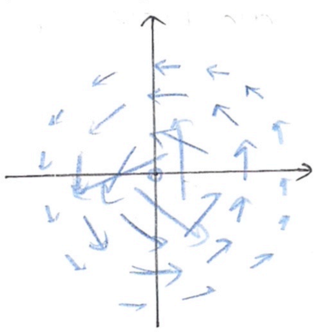
$$F(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{j}$$

$$F(\vec{r}) = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\frac{\vec{r}}{r}$$



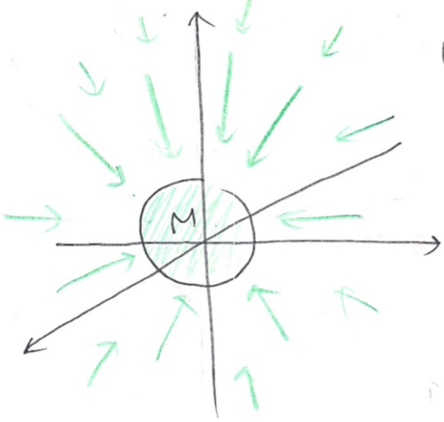
⑤ נרצה למדל זרימה של מים סביב חור ניקוז

במקרה זה התנועה סיבובית אך חשוב להתייחס לכך שמהירות התנועה עולה בקרבת החור.



$$F(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}$$

$$F(\vec{r}) = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\frac{\vec{r}}{r^2}$$



⑥ **שדה כבידה** - נרצה לתאר את כוח הכבידה של מסה M במערכת צירים הממוקמת כך שמרכזה ב-M

אם נניח מסה m בכל נקודה במרחב מופעל עליה כוח "המושך" אותה ל-M.

חוק הכבידה של ניוטון קובע כי הכוח הפועל הוא

$$F(\vec{r}) = -G\cdot\frac{M\cdot m}{r^3}\cdot\vec{r}$$

ככל שמתקרבים יותר למסה M יופעל כוח גדול יותר.

$$|F| = \frac{G\cdot M\cdot m}{r^2}$$

הכוח פרופורציונלי למסות וביחס הפוך לריבוע מרחק.

שדה גרדיאנט

∇ נבלה הוא סימון לאופרטור הגזירה $\vec{\nabla}=(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n})$ דֶל / גרדיאנט.

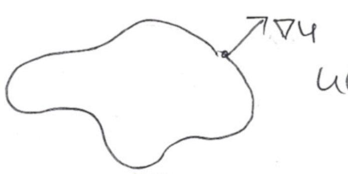
גרדיאנט ∇u של שדה סקלרי $u:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ (פונקציה)

הוא שדה וקטורי $\nabla u:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ המתאים לכל נק׳ את וקטור הגרדיאנט.

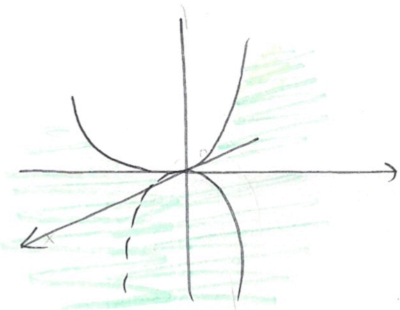
דוגמאות: $u:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $\nabla u:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$

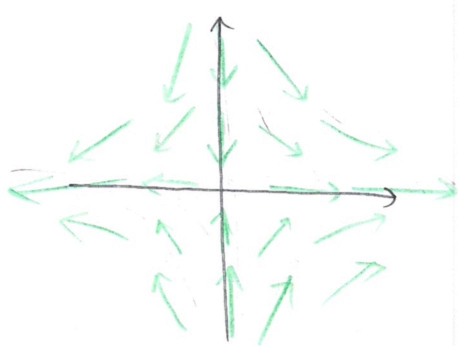
1) $u(x,y)=x^2+y^2$ $\qquad$ $\nabla u(x,y)=(2x,2y)$

תזכורת חשובה: בכל נקודה (x,y) $\nabla u(x,y)$ הוא וקטור המצביע בכיוון שבו השינוי המקסימלי בשדה הסקלרי u והגודל שלו הוא קצב השינוי המקסימלי. ∇u מאונך לעקומת גובה של הפונקציה u, כלומר $u(x,y)=c$



2) $u(x,y)=x^2-y^2$ $\qquad$ $\nabla u(x,y)=(2x,-2y)$





3) **טמפרטורה** $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ הוא שדה סקלרי

$\nabla T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ הוא שדה גרדיאנט שבו כל וקטור מצביע על כיוון השינוי המקסימלי של הטמפרטורה.

אבל, חום מתפשט דווקא לכיוון הטמפרטורה הנמוכה יותר ולכן שדה וקטורי שמתאר התפשטות של חום יהיה דווקא $\mathbf{F=-k\cdot\nabla T}$

k קבוע שתלוי בחומר שממנו עשוי המרחב