התכנסות במידה שווה

$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ב - $[0,1)$ אך לא במידה שווה, אך כן במידה שווה ב - $[0,c]$ לכל $0 < c < 1$.

אפשר מההגדרה, ואפשר מהמשפט הבא:

משפט (ויירשטרס)

יהיו f_n פונקציות המוגדרות על קב' X ומקיימות $|f_n(x)| \leq a_n$ עבור מספרים ממשיים a_n כך ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה.

הוכחה

מקריטריון קושי להתכנסות במידה שווה.

יהי $\varepsilon > 0$. לכל $m, n \in \mathbb{N}$ (נניח בלי הגבלת הכלליות $n < m$):

$$|S_m(x) - S_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| \overset{\text{אי שוויון המשולש}}{\leq} |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_m(x)| \leq$$

$$\leq a_{n+1} + \cdots a_m = \left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right|$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס לכן סדרת הסכומים החלקיים שלו מקיימת את תנאי קושי, כלומר יש N כך שלכל $N \leq n < m$, מתקיים $|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k| < \varepsilon$. האי שוויון הראשון נתון לכל $x \in X$ ולכן $|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in X$.

דוגמה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ב- $[0, c_{<1}]$ לכל n, $|x^n| = |x|^n \leq c^n$. $\sum_{n=1}^{\infty} c^n < \infty$ (הטור הנדסי עם $|c| < 1$). לכן $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ מתכנס במידה שווה ב - $[0, c]$.

דוגמה

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

(ב - $\mathbb{R}$)

$$\frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ לכן טורנו מתכנס במידה שווה.

הערה

מהמשפט, אם נציב בו $|f_n(x)|$ במקום $f_n(x)$, נקבל שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)$ מתכנס במידה שווה)

דוגמה

יש טורים שמתכנסים במידה שווה אך לא בהחלט.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} \text{ ב} - [0,\infty)$$

לכל x קבוע,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right| = \frac{1}{n+x} \quad . \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+x}$$

(שקול למשל על ידי מבחן ההשוואה הגבולי ל $-\frac{1}{n}$).

ממשפט לייבניץ, ($0 \searrow \frac{1}{n+x}$), שארית הטור $r_n(x)$ מקיימת

$$|r_n(x)| < \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x}\right| = \frac{1}{n+1+x} < \frac{1}{n+1} \to 0$$

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

$$|S_n(x) - s(x)| = |r_n(x)| < \frac{1}{n+1} \to 0$$

לכן $S_n(x) \to S(x)$ במידה שווה.

(קיבלנו בנוסף, שאם טור פונקציות מתכנס אז הטור מתכנס במידה שווה $\Leftrightarrow$ הזנב מתכנס במידה שווה ל -0. הערה: הכיוון השני בהוכחה דומה להוכחה של הכיוון הראשון בסדר הפוך)

תרגיל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{nx}\ in\ (0,1)$$

מתכנס שם, לא מתכנס בהחלט באף x, לא מתכנס במידה שווה שם.

משפט

גבול במידה שווה של סדרת פונקציות רציפות הוא רציף בכל הנקודות בהן הפונקציות בסדרה רציפות:

יהיו $f_n \to f$ במידה שווה ב - X.

לכל $x_0 \in X$ כך שלכל פונקציה f_n רציפה ב - x_0, גם הפונקציה f רציפה ב - x_0

הוכחה

(רעיון: $f(x) \approx_{\text{גדול } n} f_n(x) \approx_{\text{קטן } \delta} f_n(x_0) \approx f(x_0)$)

יהי $\varepsilon > 0$. ניקח N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in X$.

נקבע $n > N$. הפונקציה f_n רציפה ב – x_0. ניקח $\delta > 0$ כך שמתקיים $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$.

לכל $x \in X$ המקיים $|x - x_0| < \delta$. תהי $x \in X$ כך ש – $|x - x_0| < \delta$ אזי

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq_{\text{אשמ}}$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon$$

מסקנה

1. גבול במידה שווה של פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה.
2. אם טור של פונקציות רציפות מתכנס במידה שווה אז סכומו הוא פונקציה רציפה.

הוכחה

לגבי (2):

אם $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ במידה שווה אז

$$S_n(x) := \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{f_k(x)}_{\text{רציפה}}}_{\substack{\text{סכום סופי של פונקציות רציפות} \\ \Downarrow \\ S_n(X) \text{ רציפה}}} \rightarrow_{\text{במש}} S(x)$$

המחשת המסקנות: אם הפונקציות רציפות וההתכנסויות הן במידה שווה, אז

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\lim_{n \to \infty} f_n(x)}_{f(x)} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\lim_{x \to x_0} f_n(x)}_{f_n(x_0)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)}_{S(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lim_{x \to x_0} f_n(x)}_{f_n(x_0)}$$

דוגמה

$\frac{x}{1-x} = \sum \underbrace{x^n}_{\text{רציפות}}$ במידה שווה בכל קטע $[0, c]$.

ואכן הפונקציה $\frac{x}{1-x}$ רציפה בכל קטע $[0, c_{<1}]$ ולכן רציפה ב - $[0,1)$

דוגמה

ייתכן ש - $f_{\text{רציפה}} \to f_{n_{\text{רציפות}}}$ למרות שההתכנסות אינה במידה שווה. למשל:

$x^n(1-x^n) \to 0$ ב - $[0,1]$ וראינו שההתכנסות אינה במידה שווה

$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n\right)=\frac{1}{4}>\varepsilon$)

משפט (דיני)

יהיו f_n, f פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ כך ש - $f_n(x) \searrow f(x)$ (או $f_n(x) \nearrow f(x)$) לכל x בקטע. אזי ההתכנסות $f_n \to f$ היא במידה שווה.

ניסוח עבור טורים: יהיו פונקציות $f_n(x) \geq 0$ ורציפות בקטע $[a,b]$. אם הסכום $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ רציפה אז התכנסות הטור אל $S(x)$ הוא במידה שווה.

(כיוון ש - $S_n(x) \nearrow S(x) \Leftarrow S_n(x) \leq S_n(x) \leq S_n(x)+f_{n+1}(x)=S_{n+1}(x)$

הוכחה

בלי הגבלת הכלליות, $f(x)=0$

(ניקח $g_n(x):=f_n(x)-f(x)$ אז $g_n(x) \searrow 0$ +רציפות

$\overset{\text{נניח שהוכחנו}}{\Leftarrow} 0 \to g_{n=f_n(x)-f(x)}$ במידה שווה. (בדוק!)

יהיו $f_n(x) \searrow 0$ רציפות ב $-[a,b]$. נניח שההתכנסות אינה במידה שווה. ניקח $\varepsilon>0$ כך שלכל N יש $n>N$ ונקודה $x \in X$ כך ש - $\varepsilon \leq |f_n(x)-0|$.

לחילופין, מההגדרה השקולה מהשיעור הקודם, יש סדרה עולה m_n של מספרים טבעיים ונקודות $x_{m_n} \in [a,b]$ כך שמתקיים $f_{m_n}(x_n)=\left|f_{m_n}(x_n)-0\right| \geq \varepsilon$

נראה שאם x נקודת גבול של תת סדרה של x_n אז הפונקציות $f_n(x) \nrightarrow 0$.

המשך ההוכחה בהרצאה הבאה.