

תרגיל בית 8 (ליניארית מדמ"ח)

שאלה 1

מצאו את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של המטריצה הממשית הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

הוכיחו או הפריכו: למטריצות A, A^t יש אותו פולינום מינימאלי.

שאלה 3

יהיו $A, B \in F^{n \times n}$ שתי מטריצות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f_A(x) = f_B(x)$ אזי $m_A(x) = m_B(x)$

ב. אם $m_A(x) = m_B(x)$ אזי $A \sim B$ (משמע, המטריצות דומות)

ג. אם $m_A(x) = m_B(x)$ אזי $f_A(x) = f_B(x)$

שאלה 4

הוכיחו שאם אחת מהמטריצות $A, B \in F^{n \times n}$ הפיכה אזי $m_{AB}(x) = m_{BA}(x)$

שאלה 5

תהי $A \in F^{n \times n}$ מטריצה בעלת הפולינום המינימלי $m_A(x) = (x-1)^2$. יהי $f(x) = x^2 + 4x + 3$ פולינום (לאו דווקא הפולינום האופייני!). הוכיחו שהמטריצה $f(A)$ היא הפיכה.

רמז: השתמשו בנתון $m_A(A) = 0$ על מנת לפשט את $f(A)$ וזכרו: מטריצה היא הפיכה רק כאשר הדטרמיננטה שלה אינה אפס.

שאלה 6

שלשו את המטריצה הבאה: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

בהצלחה!