תרגול 9

9 ביולי 2013

וקטורים ניצבים ומרחב ניצב

הגדרות: יהי Vממ"פ (עם נורמה מושרת). $v,u\in V$ $S\subset V$ תת קבוצה.

1. הזווית בין vל u מוגדרת להיות $\cos(\theta):=\frac{<u,v>}{||u||\cdot||v||}$.
2. v,u יקראו ניצבים/מאונכים/אורתוגונאליים אם $<v,u>=0$ (מסומן $v\perp u$).
3. S תקרא אורתוגונלית אם כל שני וקטורים ב S ניצבים זה לזה. (אם S בסיס הוא יקרא בסיס אורתוגונלי)
4. התת מרחב הניצב ל Sמוגדר להיות $S^{\perp}:=\{v\in V\,|\,\forall u\in S:<v,u>=0\}$. (תרגיל $S^{\perp}$ הינו תת מרחב. תרגיל: $S^{\perp}=[span(S)]^{\perp}$)
5. v יקרא נורמלי אם $||v||=1$ (הגודל שלו 1).
6. עבור $v\neq 0$ התהליך/מעבר $v\to\frac{v}{||v||}$ נקרא נירמול (תרגיל: הגודל של $\frac{v}{||v||}$ הוא 1) .
7. S תקרא אורתונורמלית אם S אורתוגנלית וכל וקטור ב Sהוא נורמלי. (אם S בסיס הוא יקרא בסיס אורתונורמלי)

דוגמאות ותרגילים:

- $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ מאונך ל $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

  כי $0=-2\cdot1+0+1\cdot2=< \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}>$

- הקבוצה $S=\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\pi\\0\end{pmatrix}\}$ אותוגונלית (בדיקה ישירה כל שניים מאונכים זה לזה). כיוון ש $\#S=3$ היא בסיס אורתוגנלי של $\mathbb{R}^3$.

- הנרמול של $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ הוא המעבר ל .

$$\frac{\begin{pmatrix}-2&0&1\end{pmatrix}}{||\begin{pmatrix}-2&0&1\end{pmatrix}||}=\frac{\begin{pmatrix}-2&0&1\end{pmatrix}}{\sqrt{5}}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

- הוקטור $\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ נורמלי כי

$$||\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}|| = \sqrt{(\frac{-2}{\sqrt{5}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{5}})^2} = 1$$

- הקבוצה $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\}$ אורתונורמלית.

- תרגיל: תהא $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ אזי $[R(A)]^{\perp} = N(A)$

הוכחה: $(\supseteq)$יהא $x \in N(A)$. $\Leftarrow$ $Ax = 0$. כלומר $x = \begin{pmatrix} - & \vec{R_1(A)} & - \\ - & \vdots & - \\ - & \vec{R_m(A)} & - \end{pmatrix}$

0ולכן לכל i $x \in [R(A)]^{\perp} \Leftarrow < R_i(A), x >= R(A) \cdot x = 0$.

$(\subseteq)$ יהא $x \in [R(A)]^{\perp}$. אזי לכל i $Ax = 0 \Leftarrow < R_i(A), x >= R_i(A) \cdot x = 0$.
$\Leftarrow x \in N(A)$.

- תרגיל: יהיו $\mathbb{R}^3 \ni u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $S = \{u, v\}$ מצא בסיס ל $S^{\perp}$

פתרון: נגדיר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow S^{\perp} = N(A)$ (לפי תרגיל קודם) . נדרג $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. נציב $y = t$ ונקבל $N(A) = \{\begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ובסיס הוא $\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

הערה: הוכחתם כי $B_R \cup B_N$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$ ולכן היה צפוי שמספר האיברים בבסיס של $N(A)$ הוא 1

הטלות

הטלה על וקטור:

יהא V ממ"פ, $v, u \in V$ ההטלה של v על u היא נקודה ב $\alpha u \in span(\{u\})$ כך ש $< v - \alpha u, u >= 0$ כלומר $(v - \alpha u) \in (\{u\})^{\perp} = (span(\{u\})^{\perp}$. נחשב את α:

$$\alpha = \frac{<v,u>}{||u||^2} \Leftarrow 0 =< v - \alpha u, u >=< v, u > -\alpha < u, u >$$

דוגמא: מה ההטלה של $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ על $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

פתרון $\alpha = \frac{<\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}>}{||\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}||^2} = \frac{6}{3} = 2$

ולכן ההטלה היא $2(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$.

הטלה על תת מרחב:

יהא Vממ"פ, $W \subset V$ תת מרחב ו $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$ בסיס אורתוגונלי ל W.

אזי $< \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j >= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \bar{\beta_j} < v_i, v_j >= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \bar{\beta_k} ||v_k||^2$

בפרט אם B בסיס אורתונומאלי $< \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j >= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \bar{\beta_k}$

הטלה על תת מרחב:

יהא V ממ"פ, $W \subset V$ תת מרחב $v \in V$ ההטלה של v על W היא נקודה ב $u \in W$ כך ש $\forall w \in W \ :< v-u, w >= 0$ כלומר $(v-u) \in W^{\perp}$. איך נחשב את u?

פתרון: נניח כי $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$ בסיס אורתוגונלי של W. אזי $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \in W$ ולכל $1 \le j \le m$ מתקיים

$$\begin{aligned} 0 &= < v-u, v_j >=< v - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, v_j > \\ &= < v, v_j > - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i < v_i, v_j >=< v, v_j > - \alpha_j < v_j, v_j > \end{aligned}$$

ולכן

$\alpha_j = \frac{<v, v_j>}{||v_j||^2}$ כלומר $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{<v, v_i>}{||v_i||^2} v_i$ במילים אחרות: u הוא סכום ההטלות v על כל איבר בסיס v_j בנפרד.

דוגמא:

מה ההטלה של $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ על $W = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$?

פתרון: $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ בסיס אורתוגונלי ל W. נבדוק הטלות של $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ על איברי הבסיס:

ההטלה על $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ היא $\frac{<\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}>}{||\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}||^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ההטלה על $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ היא $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ולכן ההטלה על התת מרחב היא

$$-\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

טענה: בסימונים לעיל $||v-u|| = \min\{||v-w|| \mid w \in W\}$ (כלומר ההיטל הוא הנקודה הכי קרוב ב W ל v או הסטיה המינמאלית של v מ W מתקבלת ב u.)

הוכחה:

טענת עזר : לכל $w \in W$ מתקיים: $||v-u+u-w||^2 = ||v-u||^2 + ||u-w||^2$

הוכחת עזר: כיוון ש $u \in W$ היטל ו $(u-w) \in W$ נובע $< v-u, u-w >= 0$ ולכן

$$\begin{aligned} ||v-u+u-w||^2 &= <(v-u)+(u-w),(v-u)+(u-w)>= \\ &= <v-u,v-u>+<u-w,u-w>=||v-u||^2+||u-w||^2 \end{aligned}$$

כעת: רוצים להוכיח כי $||v-u||$ מינמאלי. ש"ל ש $||v-u||^2$ מינמאלי.
לפי טענת עזר לכל $w \in W$ מתקיים
$||v-w||^2 = ||v-u+u-w||^2 = ||v-u||^2 + ||u-w||^2 \geq ||v-u||^2$ ■
הערות:

1. תהליך גרם שמידט מבטיח לנו כי קיים בסיס אורתוגונלי ל W.
2. דוגמא פרטית של הטלה v על תת מרחב W היא הטלת v וקטור u אם נגדיר $W = span(\{u\})$

תהליך גרם שמידט

יהא V ממ"פ ו־ $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה בת"ל. תהליך גרם שמידט מעביר את B אל קבוצה $B^{'} = \{w_1, \dots, w_n\}$ אורתונורמלית.
האלגוריתם:

$$w_1 := v_1$$

$$w_2 := v_2 - \frac{<v_2,w_1>}{||w_1||^2} w_1$$

$$w_3 := v_3 - \frac{<v_3,w_1>}{||w_1||^2} w_1 - \frac{<v_3,w_2>}{||w_2||^2} w_2$$

$$\vdots$$

$$w_i := v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{<v_i,w_k>}{||w_k||^2} w_k$$

כעת $B^{'} = \{w_1, \dots, w_n\}$ היא קבוצה אורתוגנאלית וע"י נירמול כל וקטור נקבל את המבוקש.
הערות:

1. בפרט לכל $W \subset V$ תת מרחב קיים בסיס אורתונורמלי (בפרט אורתוגונלי)
2. לכל $1 \leq l \leq n$ מתקיים $span(\{v_1, \dots, v_l\}) = span(\{w_1, \dots, w_l\})$ ולכן $span(B) = span(\{w_1, \dots, w_l, v_{l+1}, \dots v_n\})$ כלומר ניתן להפעיל את תהליך גרם שמידט רק על הרישא של הקבוצה בלי לאבד מידע.

דוגמא:
הפוך את הקבוצה $\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ לקבוצה אורתונורמלית.

פתרון: נבחר $w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{<v_2,w_1>}{||w_1||^2}w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{||w_1||^2}w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{||w_2||^2}w_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(\frac{1}{2})}{(\frac{6}{4})} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כעת $\{w_1, w_2, w_3\}$אורתוגונאלית (בדקו!). ננרמל את הוקטורים
$||w_1|| = \sqrt{2} \quad ||w_2|| = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad ||w_3|| = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

כעת $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ קבוצה אורתונורמלית.

הערה: אם היינו מחליפים את סדר האברים בבסיס ומתחילים עם $w_1 = v_2$ היינו מקבלים קבוצה אורתונורמלית אחרת.

מטריצות אורתוגונליות ויונטריות

הגדרה: מטריצה $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ תקרא אורתוגנלית אם עמודות המטריצה הם קבוצה אורתונורמלית.
בפרט מתקיים $QQ^t = Q^tQ = I$ ובפרט $Q^{-1} = Q^t$

הגדרה: מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ תקרא יונטרית אם עמודות המטריצה הם קבוצה אורתונורמלית.
בפרט מתקיים $AA^* = A^*A = I$ ובפרט $A^{-1} = A^*$ כאשר $A^* = \bar{A}^t$ (שיחלוף+הצמדה כל רכיב).

תרגיל: תהא Qאורתוגונלית. הוכח שלכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $||x|| = ||Qx||$ (כלומר Q שומרת גדלים)

פתרון: מ"ל $||x||^2 = ||Qx||^2$.

$||Qx||^2 =< Qx, Qx >= (Qx)^tQx = x^tQ^tQx = x^tx =< x, x >= ||x||^2$ ■