מבחן לינארית 1 קיץ תשפא

ט"ז אלול תשפ"א, 24.8.2021

מרצים: גיא בלשר, תמר בר-און, אליהו מצרי, אלעד עטייא, ארז שיינר, .
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, נועה כהן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד מקסמאלי: 105 נקודות

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

בהצלחה!

1. (21 נק') נגדיר U,W תתי קבוצות של $\mathbb{R}^3$ באופן הבא:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0 \right\}$$
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ s-2 \\ s+t-1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

(א) הוכיחו כי W הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

(ב) מצאו בסיס ל $W \cap U$.

(ג) מצאו וקטור $v \in \mathbb{R}^3$ המקיים כי $v \notin W+U$, או הוכיחו שלא קיים כזה וקטור.

2. (21 נק') תהא $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית ונתונה מטריצה מייצגת שלה

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ a-2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

כאשר $a \in \mathbb{R}$ (פרמטר) וגם

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

שני בסיסים (סדורים) של $\mathbb{R}^3$.

(א) מצאו את כל ערכי a עבורם T הפיכה.

(ב) עבור $a=3$, מצאו מפורשות את $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(ג) עבור $a=1$, מצאו בסיסים ל $\ker T$ ול $\mathrm{Im}T$.

3. (21 נק') יהי V מ"ו ויהיו W_1,W_2,W_3 תתי מרחבים שלו. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

(א) אם $W_1+W_2=W_1+W_3$ וגם $W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3$ אז $W_2=W_3$.

(ב) אם $W_1 \subseteq W_3$ אז $W_1+(W_2 \cap W_3) = (W_1+W_2) \cap W_3$.

(ג) אם $W_2 \cap W_3 = \{0_V\}$ אז $W_1 \cap (W_2+W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$.

4. (21 נק') יהי V מ"ו מימד 2 מעל $\mathbb{R}$ ויהא $B = \{v_1, v_2\}$ בסיס ל V. נגדיר בנוסף

$$v_3 = v_1 + v_2$$
$$v_4 = v_1 - v_2$$

שני וקטורים נוספים ב V.

(א) הוכיחו/הפריכו: לכל $v \in V$ קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ כך ש

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$$

ובנוסף:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

(ב) הוכיחו/הפריכו: לכל $v \in V$ קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ כך ש

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$$

ובנוסף:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$
$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

(ג) נגדיר את הקבוצה

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0 \right\}$$

הוכיחו/הפריכו: W תת מרחב של $\mathbb{R}^4$.

5. (21 נק') הגדרה: שתי העתקות לינאריות S, T יקראו מתחלפות אם $ST = TS$.
באופן דומה, שתי מטריצות A, B יקראו מתחלפות אם $AB = BA$.
יהא V מ"ו מימד $n \geq 2$. ותהיינה שתי העתקות לינאריות $S, T : V \to V$ (אופרטורים).

(א) הוכיחו/הפריכו:
אם S, T מתחלפות אזי לכל שני בסיסים B, C של V מתקיים שהמטריצות המייצגות $[T]_B^B, [S]_C^C$ מתחלפות.

(ב) הוכיחו/הפריכו:
אם לכל שני בסיסים B, C של V מתקיים שהמטריצות המייצגות $[T]_B^B, [S]_C^C$ מתחלפות אז S, T מתחלפות.

(ג) הוכיחו:
אם S, T שתיהן העתקות לא הפיכות וגם לכל 4 בסיסים B, C, D, E של V מתקיים שהמטריצות המייצגות $[T]_C^B, [S]_E^D$ מתחלפות אז $T = 0$ או $S = 0$.