תרגול כיתה 5 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
התפלגויות (בדידות) מיוחדות – המשך

שאלה 1

ידוע שמספר הרכבים הנכנסים לצומת מתפלג פואסון עם $\lambda = 5$ לדקה. מה ההסתברות ש-:

1) בין 10:00 ל- 10:01 לא ייכנס אף רכב?
2) בדקה מסויימת ייכנסו לפחות 3 רכבים?
3) בין 11:00 ל- 11:05 ייכנסו 20 רכבים?
4) בהינתן שבמשך חצי דקה נכנסו 4 רכבים, מה ההסתברות שבמהלך כל אותה הדקה הבאה ייכנסו 6 רכבים סה"כ?

פתרון:

פונ' ההסתברות של התפלגות פואסון: $\left(\lambda > 0,\ k \in \left\{0,1,2,...\right\}\right)$ $\quad P\left(X = k\right) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$X \sim Poi\,(5)$ – מס' הרכבים (נשים לב שהיחידות נמדדות בדקה).

א) $P(X = 0) = \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = e^{-5} = 0.0067$

ב)

$$\begin{aligned}&P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)\\&= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right]\\&= 1 - \left[e^{-5} + \frac{5e^{-5}}{1!} + \frac{5^2 e^{-5}}{2!}\right] = 1 - e^{-5}\left[1 + 5 + \frac{5^2}{2}\right] = 0.875\end{aligned}$$

ג) נעזר בעובדה הבאה לגבי התפלגות פואסון $X \sim Poi(\lambda) \Rightarrow tX \sim Poi(\lambda t)$

ולכן עבור יחידת זמן של 5 דקות $X \sim Poi\,(5 \cdot 5)$

(כלומר 5 פניות בדקה <= 25 פניות ב-5 דקות)

מכאן $P(5X = 20) = \frac{25^{20} e^{-25}}{20!} = 0.052$

ד). ניצול תכונת האי-תלות בקטעי זמן זרים.

$$P\left(X\left(1\right) = 6 \mid X\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4\right) = \frac{P\left(X\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) = 6 - 4\right) P\left(X\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4\right)}{P\left(X\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4\right)} = P\left(X\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\right)$$

$$= \frac{2.5^2 e^{-2.5}}{2!} = 0.2565$$

<u>שאלה 2</u>

במפעל ממתקים נארזות סוכריות אדומות וירוקות באקראי, בשקיות אטומות של 10 סוכריות בחבילה. נתון שב- 20% מהחבילות נארזות שמונה סוכריות אדומות וב- 80% מהחבילות נארזות שש סוכריות אדומות.
במיכל גדול בחנות מפוזרות הרבה חבילות סוכריות משני הסוגים הנ"ל.
אדם שנכנס מחליט לקנות חבילת סוכריות רק לאחר ששלף 4 סוכריות ללא החזרה מהחבילה, וראה שרובן אדומות. איזה אחוז מהחבילות במיכל הוא יקנה?

<u>פתרון:</u>

נסמן: B – המאורע שהאדם קונה חבילה. A_1 – החבילה שנבחרה מכילה 8 סוכריות אדומות, A_2 – החבילה שנבחרה מכילה 6 סוכריות אדומות.

ההסתברות המבוקשת מתקבלת בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(B) = P(3\ red\text{-}or\text{-}4\,red \mid A_1)\,P(A_1) + P(3\ red\text{-}or\text{-}4\,red \mid A_2)\,P(A_2)$$

הבחירה של 4 הסוכריות ללא החזרה מתפלגת, עבור כ"א מסוגי החבילות

$$X(A_1) \sim HG(N=10, m=8, k=4), \quad X(A_2) \sim HG(10,6,4)$$

פונ' ההסתברות של ההתפלגות ההיפרגאומטרית HG(N,m,k)

$$P(X=k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad k = 0,1,..,n$$

כאשר נבחרו מחבילה של 8 אדומות, רוב הסוכריות אדומות בהסתברות

$$P(3\ red\text{-}or\text{-}4\,red) = P(X=3) + P(X=4)$$

$$= \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{3}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = 0.8667$$

כאשר נבחרו מחבילה של 6 אדומות, רוב הסוכריות אדומות בהסתברות

$$P(3\ red\text{-}or\text{-}4\,red) = P(X=3) + P(X=4)$$

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{3}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}} = 0.4524$$

נותר להציב בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(B) = 0.4524 \cdot 0.2 + 0.8667 \cdot 0.8 = 0.7838$$

כלומר- האדם יקנה 78.38% מהחבילות במיכל.

מ"מ דו מימדי, התפלגות משותפת, שונות משותפת שונות מותנה ומקדם המתאם

נוסחאות

$$(1)\qquad E(\sum x)=\sum E(x)$$

$$(2a)\qquad V(X+Y)=V(X)+V(Y)\qquad [X,Y\ \text{independent}]$$

$$(2b)\qquad V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)\qquad [X,Y\ \text{dependent}]$$

$$(3)\qquad Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$(4)\qquad \rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

$$(5)\qquad \mathrm{E}(X\mid Y=y)=\sum_x x\,\mathrm{P}(X=x\mid Y=y)=\sum_x x\,\frac{\mathrm{P}(X=x,Y=y)}{\mathrm{P}(Y=y)}$$

שאלה 3

בכד חמישה כדורים הממוספרים מ-1 עד 5: כדורים מס' 1 ו-2 אדומים, כדורים מס' 3 ו-4 ירוקים וכדור מס' 5 לבן. מוציאים מהכד שני כדורים, באופן מקרי וללא החזרה. יהיו:

X – מספר הכדורים הירוקים שיצאו.

Y – מספר הכדורים, שעליהם מספרים זוגיים, שיצאו.

1. מצא את פונקצית ההתפלגות המשותפת של X ו- Y ואת ההתפלגויות השוליות.
2. מצא את ההסתברות ש- (X = Y) ואת ההסתברות ש- (X > Y)
3. חשב את השונות המשותפת $Cov(X,Y)$. האם X ו-Y מתואמים? הערך את חוזק המתאם.
4. חשב את מקדם המתאם בין X ו- Y.
5. ידוע כי יצא לפחות כדור אחד אדום. מה ההסתברות שיצא בדיוק כדור אחד שעליו מספר זוגי?
6. חשב $P(X\mid Y=1)$ ואת $E(X\mid Y=1)$.

פתרון:

א. טבלת ההתפלגות המשותפת של X ו-Y (השוליות בשולי הטבלה, עמודה ושורה קיצוניות)

Y \ X	0	1	2	P(y=k)
0	1/10	2/10	0	3/10
1	2/10	3/10	1/10	6/10
2	0	1/10	0	1/10
P(x=k)	3/10	6/10	1/10	1

החישוב בתאים:

[זו ההסתברות להוציא כדור ראשון לא ירוק ולא זוגי (2/5) וכדור שני לא ירוק ולא זוגי (1/4)]

$$P(X=0,Y=0)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

ממשיכים מאותם שיקולים:

[(כדור ראשון לא זוגי וירוק וכדור שני לא זוגי ולא ירוק) = (2/4)(1/5)

+ (כדור ראשון לא זוגי ולא ירוק וכדור שני לא זוגי וירוק (1/4)(2/5) =]

$$P(X=1,Y=0)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{10}$$

[אי אפשר לשלוף 2 כדורים ירוקים וגם שלא יהיו בידנו כדורים עם מס' זוגי]

$$P(X=2,Y=0)=0$$

והמקרה הכי מורכב:
[(ירוק+לא ירוק ולא זוגי) + (ירוק ולא זוגי+לא ירוק וזוגי) + (לא ירוק וזוגי+ירוק ולא זוגי) + (לא ירוק ולא זוגי+ירוק וזוגי)]

$$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

וכו'...

<= ההתפלגויות השוליות [P(X=k), P(Y=k)] מופיעות בשולי הטבלה (עמודה ושורה קיצוניות)

2. נעזר בטבלה שבנינו:

$$P(X=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)$$
$$=1/10+3/10+0=4/10$$
$$P(X>Y)=P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)$$
$$=2/10+0+1/10=3/10$$

3. חישוב התוחלות לפי ההגדרה:

$$E[X]=\sum_{k=0}^{2}kP(X=k)=0+1\cdot 6/10+2\cdot 1/10=4/5$$

בגלל הסימטריות בשאלה ניתן מיד לומר שזו גם התוחלת של Y. חישוב מפורט מראה:

$$E[Y]=\sum_{k=0}^{2}yP(Y=k)=0+1\cdot 6/10+2\cdot 1/10=4/5$$

השונות המשותפת לפי ההגדרה $Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]\cdot E[X]$:

$$E[XY]=\sum_{i,j=0}^{2,2}xyP(X=i,Y=j)=1\cdot 1\cdot 3/10+1\cdot 2\cdot 1/10+2\cdot 1\cdot 1/10=7/10$$

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]\cdot E[X]=7/10-(4/5)^2=0.06$$

לא קיבלנו $Cov(X,Y)=0$, לכן X ו-Y מתואמים.

<= השונות המשותפת תלויה ביחידות ולכן איננו יודעים עד כמה המתאם אכן קטן או גדול.

4. מטעמי סימטריה $\sigma(X)=\sigma(Y)$. נחשב תחילה: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

$$E\left[X^2\right]=\sum_{k=0}^{2}y^2P(Y=k)=0+1^2\cdot 6/10+2^2\cdot 1/10=1$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{E\left[X^2\right]-E^2[X]}=\sqrt{1-0.8^2}=0.6$$

ונציב בנוסחה למקדם המתאם:

$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{0.06}{0.6\cdot 0.6}=1/6$ (רואים שהמתאם לא גדול אבל גם לא קרוב ל-0).

5. כעת נסמן ע"י X את מספר הכדורים האדומים, מטעמי סימטריה (מרחב ההסתברות סימטרי ויש 2 כדורים אדומים ו-2 ירוקים) התפלגותם זהה להתפלגות הירוקים (לכן אפשר להשתמש בטבלה).

$$\begin{aligned}&P(Y=1\mid X\ge 1)\\&=\frac{P\left(Y=1\cap X=1\right)+P\left(Y=1\cap X=2\right)}{\left[P(X=1)+P(X=2)\right]}\\&=\frac{0.3+0.1}{0.6+0.1}=0.571\end{aligned}$$

6. ההסתברות המותנה:

$$P\left(X\mid Y=1\right)=\frac{P\left(X,Y=1\right)}{P\left(Y=1\right)}=\frac{P\left(X,Y=1\right)}{0.6}=\begin{cases}0.2/0.6=1/3 & ,x=0\\0.3/0.6=1/2 & ,x=1\\0.1/0.6=1/6 & ,x=2\\0 & ,else\end{cases}$$

התוחלת המותנה:

$$E\left(X\mid Y=1\right)=\sum_{x=0}^{2}x\,\mathrm{P}\left(X=x\mid Y=1\right)=0+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

<u>שאלה 4</u>

שתי קוביות משחק נזרקות. נגדיר מ"מ: X – התוצאה הגבוהה ביותר ו-Y – מספר הקוביות עם תוצאה זוגית.

1. בנה את טבלת ההתפלגות של (X,Y).
2. חשב את ההסתברויות הבאות:
$P(2Y<X),\ P(X+Y\le 6),\ P(X\ge 4,Y=2),\ P(X\ge 4,Y=1)$.
3. חשב את ההתפלגויות השוליות של X ו-Y.
4. האם X ו-Y בלתי תלויים? נמק.
5. מצא את התפלגות של $Z=X+Y$.
6. מהי התוחלת והשונות של Z.

<u>פתרון:</u>

X- התוצאה הגבוהה ביותר, Y- מספר הקוביות עם תוצאה זוגית.

א)

X Y	1	2	3	4	5	6
0	1/36	0	3/36	0	5/36	0
1	0	2/36	2/36	4/36	4/36	6/36
2	0	1/36	0	3/36	0	5/36

ב)

$$P(X \geq 4, Y=1) = \frac{1}{36}(4+4+6) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

$$P(X \geq 4, Y=2) = \frac{1}{36}(3+0+5) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$P(X+Y \leq 6) = 1 - P(X+Y>6) = 1 - \frac{1}{36}(6+0+5) = \frac{25}{36}$$

$$P(2Y < X) = \frac{1}{36}(\underbrace{1+0+3+0+5+0}_{y=0} + \underbrace{2+4+4+6}_{y=1} + \underbrace{0+5}_{y=2}) = \frac{30}{36}$$

ג) ההתפלגויות השוליות:

i	1	2	3	4	5	6
(P(X=i	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

i	0	1	2
(P(Y=j	9/36	18/36	9/36

ד) X,Y אינם בלתי תלויים מכיוון שלמשל:

$$P(X=3, Y=0) = \frac{3}{36} = 0.08333 \neq P(X=3)P(Y=0) = \frac{5}{36} \cdot \frac{9}{36} = 0.0347$$

{לפתור סעיפים ה' ו-ו' – רק אם נותר זמן} # #

ה) עבור Z=X+Y

s	1	2	3	4	5	6	7	8
(P(Z=s	1/36	0	5/36	3/36	9/36	7/36	6/36	5/36

לכן:

s	1	3	4	5	6	7	8
(P(Z=s	1/36	5/36	3/36	9/36	7/36	6/36	5/36

ו) התוחלת והשונות של Z:

התוחלת: $E(Z) = \sum_{s=1}^{8} sP(Z=s)$

$$E(Z) = \frac{1}{36}\left(1\cdot 1 + 3\cdot 5 + 4\cdot 3 + 5\cdot 9 + 6\cdot 7 + 7\cdot 6 + 8\cdot 5\right) = 5.472$$

השונות: $V(Z) = E\left(Z^2\right) - E^2\left(Z\right)$

$$E(Z^2) = \frac{1}{36}\left(1^2\cdot 1 + 3^2\cdot 5 + 4^2\cdot 3 + 5^2\cdot 9 + 6^2\cdot 7 + 7^2\cdot 6 + 8^2\cdot 5\right) = 32.917$$

$$V(Z) = E\left(Z^2\right) - E^2\left(Z\right) = 32.917 - 5.472^2 = 2.974$$

במקרה זה חישבנו מפורשות את הטבלה של Z, לכן זו הדרך הקצרה ביותר.

<= בגישה אחרת, העושה שימוש ב-X, ו-Y ותכונות השונות והתוחלת, ללא שימוש בטבלה של Z, נחשב ע"י:

התוחלת –

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 4\frac{17}{36} + 1 = 5.472$$

השונות –

$$V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$$

את ה-Cov נחשב ע"י:

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \sum_{j=0}^{2}\sum_{i=1}^{6} jiP(X=i, Y=j)$$

התוצאה המספרית פחות חשובה.