

מתמטיקה בדידה (88195) – בחינת סיום (מועד ב') פרופ' סטוארט מרגוליס, פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. אם פתרם את כל השאלות – נא לציין 4 שאלות לבדיקה, אחרת תיבדקנה 4 הראשונות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרונות. ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".

בהצלחה!

1. הראו, על ידי בחירת הפרדיקט Q , כי הפסוק הבא אינו בהכרח נכון:
$$\forall x \exists y Q(x, y) \wedge \forall y \exists x Q(x, y) \rightarrow \forall x \exists y (Q(x, y) \wedge Q(y, x))$$

2. יהי \sim היחס על $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ המוגדר על ידי: $(\forall a, b \in \mathbb{R}^*) : a \sim b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

- הוכיחו: \sim יחס שקילות.
- הוכיחו: כל מחלקת שקילות היא בת מנייה.
- הוכיחו: קיימת קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^*$ המכילה איבר אחד בדיוק מכל מחלקת שקילות.

3. נגדיר על הקבוצה $P = \{2, 3, 4\} \times \{1, 3, 5\}$ יחס $\tilde{\leq}$ על ידי:
$$(x_1, y_1) \tilde{\leq} (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \mid x_2 \wedge x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2)$$

- הוכיחו: $(P, \tilde{\leq})$ קבוצה סדורה חלקית.
- ציירו דיאגרמת הסה של $(P, \tilde{\leq})$.
- כמה שרשראות בנות 5 איברים יש ב- $(P, \tilde{\leq})$?
- מצאו איברים מקסימליים, מינימליים, גדול ביותר, קטן ביותר (אם יש) ב- $(P, \tilde{\leq})$.

4. תהיינה: X קבוצה; A, B תת-קבוצות של X , עם פונקציות אופייניות χ_A, χ_B .

- הוכיחו: $\chi_A + \chi_B$ היא פונקציה אופיינית של תת-קבוצה של X אם ורק אם $A \cap B = \emptyset$.
- הוכיחו: $(1 - \chi_A) \cdot \chi_B$ היא תמיד פונקציה אופיינית של תת-קבוצה של X . הביעו תת-קבוצה זו ישירות באמצעות A, B .

5. תהי A קבוצה כלשהי.

- הוכיחו: $|A^A| \neq \aleph_0$.
- תהי $f \in A^A$ פונקציה כך ש- $f \circ f \circ f \circ f$ היא פונקציה הזהות על A . הוכיחו: f היא חח"ע ועל.