

תרגיל בית 10 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. מצאו כמה פולינומים מתוקנים אי פריקים יש ממעלה 4 מעל \mathbb{F}_3 .

שאלה 2. הזכרנו שהנורמה כפליית והעקבה חיבורית (זה נובע מכך שאיברי חבורת גלואה הם הומומורפיזמים של חוגים). קעת תוכיחו שהן גם טרנזיטיביות. תהי $F \subseteq L \subseteq K$ שרשרת שדות כך שכל ההרחבות הן גלואה. הוכיחו

$$N_{K/F} = N_{L/F} \circ N_{K/L} \qquad \text{Tr}_{K/F} = \text{Tr}_{L/F} \circ \text{Tr}_{K/L}$$

שאלה 3. יהי $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$.

א. שכנו את השדה K בחוג $M_3(\mathbb{Q}) \cong \text{End}_{\mathbb{Q}}(K)$ לפי הזיהוי שראינו.

ב. מצאו את הנורמה והעקבה של כל איבר $\alpha = a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25} \in K$.

ג. הוכיחו כי $\sqrt[3]{3} \notin K$. רמז: מצאו עקבות.

שאלה 4. יהי $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}$. חשבו את $\text{Tr}_{\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p}(\alpha)$ ואת $N_{\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p}(\alpha)$.

שאלה 5. יהי $f(x) \in \mathbb{F}_3[x]$ פולינום אי פריק ממעלה 3 ויהי a שורש שלו (בשדה הפיצול). הוכיחו כי $a^{13} \in \mathbb{F}_3$.

שאלה 6. מצאו באילו שדות סופיים \mathbb{F}_q יש איבר x המקיים $x^4 = -1$. רמז: זו שאלה על החבורה הכפלית.

שאלה 7. הפריכו שאם $F = \mathbb{F}_p[\alpha]$ שדה סופי, אז תמיד $F^* = \langle \alpha \rangle$. רמז: כנראה מספיק לקחת $p = 2$. מי הם שאר השורשים של הפולינום המינימלי של α ?

שאלה 8. בנו את השדה \mathbb{F}_{32} בלי לעבוד יותר מדי קשה: בכיתה מצאנו פולינומים אי פריקים f_1, f_2, f_3 ממעלה 1 או 2. הגדירו $g = f_1^2 f_2 f_3 + 1$.

שאלה 9. רמז: המספרים 7 ו-5779 ראשוניים.

א. הוכיחו שקיים $x \in \mathbb{F}_q$ המקיים

$$\sum_{i=0}^{5778} x^i = 1 + x + \dots + x^{5778} = 0$$

אם ורק אם $q \equiv 0 \pmod{5779}$ או $q \equiv 1 \pmod{5779}$. רמז: קודם מצאו שורש של הפולינום $x^{5779} - 1$.

ב. (באופן דומה) מצאו עבור אילו מספרים טבעיים n השדה \mathbb{F}_{5^n} מכיל איבר x שמקיים

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

בהצלחה!