

תרגיל בית 6 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. תהינה $K_1/F, K_2/F$ שתי הרחבות. נניח שיש איזומורפיזם $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ המקיים $\varphi(F) = F$. הוכיחו כי

$$\text{Gal}(K_1/F) \cong \text{Gal}(K_2/F)$$

שאלה 2. תהי K/\mathbb{F}_p הרחבת שדות סופית. הוכיחו כי $\sigma(x) = x^p$ הוא איבר של $\text{Gal}(K/\mathbb{F}_p)$.

שאלה 3. יהי $f \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום אי פריק, ויהי F/\mathbb{Q} שדה הפיצול שלו ב- \mathbb{C} . הוכיחו שאם $[F : \mathbb{Q}]$ אי זוגי, אז כל שורשי $f(x)$ הם ממשיים. רמז: הצמדה מרוכבת היא אוטומורפיזם.

שאלה 4. חשבו את חבורות גלואה של ההרחבות הבאות:

א. E/\mathbb{Q} כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^5 - 1$.

ב. E/F כאשר $[E : F] = 2$ עבור F ממאפיין שונה מ-2. רמז: העזרו בשאלה מהתרגיל הקודם והראו $E = F(\sqrt{\alpha})$ עבור $\alpha \in F$.

ג. E/\mathbb{Q} כאשר E הוא שדה פיצול של פולינום אי פריק ממעלה 3 שיש לו שורש מרוכב לא ממשי.

שאלה 5. תהינה K/F ו- E/K הרחבות שדות.

א. הוכיחו או הפריכו: אם E/F הרחבה נורמלית, אז E/K הרחבה נורמלית.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם E/F הרחבה נורמלית, אז K/F הרחבה נורמלית.

ג. הוכיחו או הפריכו: אם K/F הרחבה נורמלית ו- E/K הרחבה נורמלית, אז E/F הרחבה נורמלית. רמז: ראינו משהו בשאלה הקודמת ובתרגיל בית 5.

בהצלחה!