פתרון תרגיל בית 6 בשדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום). תהי L/F הרחבת שדות ספרבילית, ויהי K שדה ביניים. הוכיחו כי גם K/F וגם L/K ספרביליות.

פתרון. ברור ש-L/F ספרבילית, כי כל איבר ב-L הוא איבר של K. עבור K/L, יהי $a \in K$ ויהי $m_{a,F}$ הפולינום המינימלי של a מעל F. אז $m_{a,L}|m_{a,F}$ ולכן ל-$m_{a,L}$ אין שורשים כפולים. לכן K/L ספרבילית.

שאלה 2. קבעו האם הפולינומים הבאים ספרביליים.

א. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ מעל $\mathbb{Q}$.

ב. $x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 2$ מעל $\mathbb{Q}$.

ג. $x^{10} + x^5 + 3$ מעל $\mathbb{F}_5$.

ד. $x^p - x + a$ מעל שדה F ממאפיין $p > 0$ (שפגשנו כבר בכיתה).

פתרון.

א. נחשב $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$, מכיוון שישנם רק גורמים לינאריים, מספיק לבדוק אם מישהו מהם מחלק את $f(x)$, ואפשר לבדוק זאת עם הצבה. אכן $f(2) = 0$, ולכן $(x-2)$ הוא גורם משותף של f ו-f' מה שאומר ש-$f(x)$ לא ספרבילי.

ב. ניתן לראות (ולהיעזר בשיטה שראינו למציאת שורשים רציונאליים) כי ± 1 הם שורשים של $f(x)$, ולכן מתפרק ל- $f(x) = (x-1)(x+1)(x^3 - 2x - 2)$. מפני ש-$\pm 1$ הם לא שורשים של $x^3 - 2x - 2$, אז $f(x)$ ספרבילי אם ורק אם $x^3 - 2x - 2$ ספרבילי. ואכן, $x^3 - 2x - 2$ הוא אי פריק (למשל לפי אייזנשטיין עם 2) ובמאפיין 0 זה גורר שהפולינום ספרבילי.

ג. הנגזרת היא 0 ולכן הפולינום לא ספרבילי.

ד. נחשב $f'(x) = px^{p-1} - 1 \equiv -1$. לכן $(f, f') = 1$ ומכאן שהפולינום ספרבילי.

שאלה 3. יהיו F, K שדות, יהי $\varphi : F \hookrightarrow K$ שיכון, ויהי $f \in F[x]$. הוכיחו:

א. $\varphi(f') = \varphi(f)'$.

ב. f ספרבילי מעל F אם ורק אם $\varphi(f)$ ספרבילי מעל K.
(הדרכה: היעזרו בקריטריון לבדיקת ספרביליות על ידי הנגזרת.)

פתרון.

א. זה נובע ישירות מההגדרה של נגזרת. נכתוב $f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$; אז

$$\varphi(f')=\varphi\left(\sum_{i=0}^{n} i a_i x^i\right)=\sum_{i=0}^{n}\varphi(i a_i)x^i=\sum_{i=0}^{n} i\varphi(a_i)x^i=\varphi(f)'.$$

שימו לב שהמעבר $\varphi(ia_i)=i\varphi(a_i)$ נובע מכך ש-ia_i הוא חיבור של a_i לעצמו i פעמים, וההעתקה φ חיבורית.

ב. נזכור כי f ספרבילי מעל F אם ורק אם $(f,f')=1$.
$\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-f ספרבילי מעל F. לכן יש פולינומים $a(x),b(x)\in F[x]$ שעבורם $a(x)\cdot f(x)+b(x)\cdot f'(x)=1$. נפעיל את φ על שני האגפים ונקבל

$$\varphi(a(x))\cdot\varphi(f(x))+\varphi(b(x))\cdot\varphi(f'(x))=\varphi(1)$$

ומהסעיף הקודם

$$\varphi(a(x))\cdot\varphi(f(x))+\varphi(b(x))\cdot\varphi(f(x))'=1.$$

זה מראה ש-$(\varphi(f),\varphi(f)')=1$, ומכאן ש-$\varphi(f)$ ספרבילי מעל K.
$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-f אינו ספרבילי מעל F. לכן יש גורם משותף $d(x)=(f,f')$ שאינו קבוע. אבל אז $\varphi(d(x))\mid\varphi(f(x))$ וגם $\varphi(d(x))\mid\varphi(f'(x))=\varphi(f(x))'$, ולכן $(\varphi(f),\varphi(f)')\neq 1$, כלומר $\varphi(f)$ אינו ספרבילי מעל K.

שאלה 4.

א. מצאו את כל ההמשכות של $\mathrm{id}:\mathbb{Q}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$ לשיכון $\psi:\mathbb{Q}(\sqrt{2})\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$.

ב. בחרו את אחד השיכונים שמצאתם בסעיף א', ומצאו את כל ההמשכות שלו לשיכון $\hat{\psi}:\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$.

פתרון.

א. הפולינום המינימלי של $\sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא x^2-2, ולכן כל המשכה כזו צריכה לשלוח את $\sqrt{2}$ לאחד מהשורשים של הפולינום הזה, כלומר $\pm\sqrt{2}$. מצד שני, אנחנו יודעים שיש לכל היותר שתי המשכות כאלו (כי $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}\right]=2$), ולכן ההמשכות של $\mathrm{id}:\mathbb{Q}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$ לשיכון כנ"ל הן $\mathrm{id}:\mathbb{Q}(\sqrt{2})\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$ והשיכון $\psi:\mathbb{Q}(\sqrt{2})\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$ הנתון על ידי $\psi(a+b\sqrt{2})=a-b\sqrt{2}$.

ב. הפולינום המינימלי של $\sqrt{3}$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ הוא x^2-3 (הוא לא משתנה כי $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})$). לכן כל המשכה של שיכון $\mathrm{id}:\mathbb{Q}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$ תהיה חייבת לשלוח את $\sqrt{3}$ ל-$\pm\sqrt{3}$. ההמשכות של $\mathrm{id}:\mathbb{Q}(\sqrt{2})\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$ לשיכון $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$ הן הזהות והשיכון

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\mapsto a+b\sqrt{2}-c\sqrt{3}-d\sqrt{6}$$

וההמשכות של השיכון $\psi:\mathbb{Q}(\sqrt{2})\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$ הן

$$\hat{\psi}_1: a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\mapsto a-b\sqrt{2}+c\sqrt{3}-d\sqrt{6}$$
$$\hat{\psi}_2: a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\mapsto a-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$$

שאלה 5. תהי L/F הרחבת שדות סופית (כלומר ממימד סופי), ויהי K שדה ביניים. נניח שההרחבות L/K ו-K/F ספרביליות. הוכיחו ש-L/F ספרבילית.
(הדרכה: בכמה דרכים ניתן להמשיך את $\mathrm{id}:F\hookrightarrow\overline{F}$ ל-$\psi:L\hookrightarrow\overline{F}$?)

פתרון. נתבונן במספר ההמשכות של $\mathrm{id}: F \hookrightarrow \overline{F}$ לשיכון $\overline{F} \hookrightarrow L$. כמו טיעון קודם, כל המשכה כזו ניתן לפרק לשני מרכיבים: המשכה של $\mathrm{id}: F \hookrightarrow \overline{F}$ לשיכון $\overline{F} \hookrightarrow K$, ואז המשכה של השיכון החדש לשיכון $\overline{F} \hookrightarrow L$. מהספרביליות, לשלב הראשון יש $[K:F]$ המשכות, ולכל המשכה כזו יש $[L:K]$ המשכות אפשריות לשיכון $\overline{F} \hookrightarrow L$. בסך הכל קיבלנו $[L:K]\cdot[K:F]=[L:F]$ המשכות של $\mathrm{id}: F \hookrightarrow \overline{F}$ לשיכון $\overline{F} \hookrightarrow L$. נקבל שוויון $[L:F]_s=[L:F]$, ומהטענה הקודמת נקבל ש-L/F ספרבילית.

שאלה 6 (רשות)**.** יהי $f=x^5+x^3+x+1\in F[x]$. הוכיחו כי f ספרבילי אם ורק אם $\operatorname{char} F\neq 11,37$.

פתרון. מחשבים את בעזרת אלגוריתם אוקלידס המורחב ומגלים כי

$$\begin{aligned}\gcd(f,f')=1&\\&=\left(-\frac{190}{407}x^3+\frac{80}{407}x^2-\frac{284}{407}x+\frac{33}{37}\right)f+\\&\quad\left(\frac{38}{407}x^4-\frac{16}{407}x^3+\frac{72}{407}x^2-\frac{79}{407}x+\frac{4}{37}\right)f'\end{aligned}$$

נשים לב ש-$407=11\cdot 37$, ולכן מדובר בחילוק באפס בשדות ממאפיין 11 או 37. בשדות כאלו המחלק המשותף המרבי הוא פולינום ממעלה חיובית.