תורת הגרפים - הרצאה 2

6 בנובמבר 2011

הגדרה

1. יהי $G=(V,E)$, $e\in E$ צלע.
הגרף $G\backslash e$ הוא הגרף שקב' קודקודיו V ואוסף צלעותיו $E\backslash e$.
2. יהי $G=(V,E)$ גרף, $v\in V$ קדקוד.
$G\backslash v$ הוא הגרף שקבוצת קדקודיו $V\backslash v$ וצלעותיו E פחות כל הצלעות החלות בv.

הגדרות תת-גרף

1. תת גרף פורש של $G=(V,E)$ הוא תת-גרף המתקבל מG אחרי סדרה של השמטת צלעות.
2. תת גרף מושרה של $G=(V,E)$ הוא תת גרף המתקבל מG אחרי סדרה של השמטת קדקדים.
3. תת גרף של $G=(V,E)$ הוא גרף המתקבל מG אחרי סדרה של השמטות קדקדים או צלעות.

עצים - הגדרה

עץ הוא גרף קשיר ללא מעגלים.
בנושא זה (עצים), נתייחס רק לגרפים פשוטים - אין לולאות או ריבוי צלעות.

הגדרה

יער הוא גרף ללא מעגלים.

טענה 1

גרף הוא עץ $\iff$ בין כל שני קדקדים קיימת מסילה יחידה.

הוכחה

נניח G עץ. בפרט, G קשיר, לכן בין כל שני קדקדים קיימת מסילה.
נניח בין u לv יש יותר ממסילה אחת:

$$\begin{aligned} u &= x_1x_2x_3...x_k=v \\ u &= y_1y_2y_3...y_m=v \end{aligned}$$

יהי $i<k$ מינימלי כך שמתקיים:

$$\begin{aligned} x_i &= z_i \\ x_{i+1} &\neq z_{i+1} \end{aligned}$$

יהי $j>i$ מינימלי כך שמתקיים:

$$x_j=z_d$$

עבור d כלשהו. אזי:

$$x_i,\, x_{i+1},\, ...,\, x_j=z_d,\, z_{d-1},\, ...,\, z_i=x_i$$

הוא מעגל, וזו סתירה לכך שG עץ, לכן ישנה מסילה יחידה בין כל שני קדקדים $u,\, v$.
נניח כעת שבין כל 2 קדקדים בG קיימת מסילה יחידה, ונוכיח שG עץ.
תחילה, G קשיר, כי בין כל 2 קדקדים יש מסילה.
כעת נניח שG לא עץ, כלומר שקיים בו מעגל:

$$u_1,\, ...,\, u_k,\, u_1$$

כאשר $k \geq 3$.
אז בין u_1 לu_k יש שתי מסילות שונות:

$$u_1,\, u_k$$

$$u_1,\, u_2,\, ...,\, u_k$$

וזו סתירה להנחה, ולכן G עץ.

הגדרה

יהי $T = (V,\, E)$ עץ. $v \in V$ נקרא עלה אם $\deg_T(v) = 1$.

הערה

יש עצים ללא עלים. לדוגמה:

1. k_1.
2. מסילה אינסופית: $V(P_\infty) = \mathbb{Z}$, $E(P_\infty) = \{(i,\, i+1) \;\mid i \in \mathbb{Z}\}$.

טענה 2

בכל עץ סופי מסדר < 1 יש לפחות 2 עלים.

הוכחה

יהי $T = (V,\, E)$ עץ סופי. בפרט, מספר הקדקדים בT סופי, לכן מס' הסדרות ללא חזרות של קדקדים סופי.
כל מסילה היא סדרה ללא חזרות. על כן, מספר המסילות בT סופי. לכן, יש מסילה בעלת אורך מקסימלי בT.
תהא $\overrightarrow{a} = u,\, x_1,\, ...,\, x_k,\, v$ מסילה מאורך מקסימלי בT.
נשים לב תחילה ש$u \neq v$ כי הסדר של $T \leq 2$ לכן הוא מכיל צלע ולכן אורך המסילה המקסימלי ≤ 1 והיות ואין 2 קודקודים זהים במסילה, $u \neq v$.

טענת עזר

$u,\, v$ עלים.

הוכחת טענת העזר

נניח u אינו עלה, אזי יש לu שכן שאינו x_1 (ואינו u). נסמנו w.
נתבונן בסדרה:

$$\overrightarrow{b} = w,\, u,\, x_1,\, ...,\, x_k,\, v$$

זה הילוך. בגלל הנחת המקסימליות של המסילה $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ אינה מסילה, לכן יש ב$\overrightarrow{b}$ קדקד שחוזר פעמיים.
כיוון שב$\overrightarrow{a}$ אין חזרות, נקבל שקיים קדקוד ב$\overrightarrow{a}$ הזהה לw, אך זה אינו x_1 או u, לכן קיים $j > 1$ כך ש$w = x_j$ או $w = v$ אבל אז יש בT מעגל, וזו סתירה לכך שהוא עץ. לכן, הוא עלה.
הוכחנו את טענת העזר ולכן הוכחנו את הטענה.

משפט 3

יהי T עץ מסדר n. יש בT $n-1$ צלעות.

הוכחה

נוכיח באינדוקציה על n.
אם $n=1$ אז T מכיל קדקד אחד ו0 צלעות.
נניח נכונות עבור כל העצים מסדר $< n$.
יהי T עץ מסדר n. לפי טענה 2, יש בT עלה v.
נתבונן בגרף $T\backslash v$. סדר הגרף הזה הוא $n-1$ ומכיוון שבT אין מעגלים גם בו אין מעגלים (בכל תת גרף של T אין מעגלים, ובפרט ב$T\backslash v$).

טענת עזר

$T\backslash v$ קשיר.

הוכחת טענת העזר

כל 2 קדקדים $x,\,y\in T\backslash v$ הם קדקדים בT וכיוון שT קשיר (כי הוא עץ), יש בT מסילה מx לy:

$$\overrightarrow{c}=x,\,...,\,y$$

$v\neq x,\,y$ כי $x,\,y\in T\backslash v$. יתר על כן, v לא מופיע במסילה $\overrightarrow{c}$ כי אחרת הקדקד שלפניו ב$\overrightarrow{c}$ והקדקד שאחריו ב$\overrightarrow{c}$ היו שכנים שלו, והם שונים כי $\overrightarrow{c}$ מסילה, ואז $\deg_T v\geq 2$ וזו סתירה לכך שv עלה, ולכן המסילה לא עוברת דרך v, ולכן $\overrightarrow{c}$ היא מסילה גם ב$T\backslash v$, ולכן $T\backslash v$ קשיר.
לכן, $T\backslash v$ עץ וסדרו $n-1$ לכן לפי הנחת האינדוקציה מס' הצלעות בו הוא $n-2$. אם נוסיף אליו את v והצלעות החלות בו (יש רק אחת כזו כי v עלה) נקבל את T ובו $n-1$ צלעות.

תרגיל

הוכח: ביער F:

$$|E\left(F\right)|=|V\left(F\right)|-k\left(F\right)$$

כאשר $k\left(F\right)$ מס' רכיבי הקשירות של F.

הגדרה

$G=\left(V,\,E\right)$ גרף קשיר מינימלי אם:

1. G קשיר
2. לכל $e\in E$, $G\backslash e$ אינו קשיר.

טענה 4

G גרף קשיר מינימלי $\iff$ G עץ.

הוכחה

נניח G קשיר מינימלי ונוכיח G עץ.
G קשיר מינימלי, בפרט קשיר. לכן צ"ל שG אין מעגלים.
נניח בG יש מעגל. תהא $e=\left(v_1,\,v_2\right)$ צלע במעגל $v_1,\,v_2,\,...,\,v_k,\,v_1$.

טענת עזר

$G\backslash e$ קשיר (ולכן G לא קשיר מינימלי וזו סתירה להנחה).

הוכחת טענת העזר

לכל זוג קדקדים $x,\,y$ בG, אם מסילה מx לy לא עוברת דרך e אז גם ב$G\backslash e$ יש מסילה בין x לy.
אם המסילה עוברת דרך e, למשל $x,\,...,\,v_2,\,v_1,\,...,\,y$, אז $x,\,...,\,v_2,\,...,\,v_k,\,v_1,\,...,\,y$ הילוך מx לy ב$G\backslash e$ ולפי תרגיל אם יש הילוך אז יש מסילה ולכן $G\backslash e$ קשיר, לכן טענת העזר נכונה וצד אחד של המשפט נכון.
נוכיח את הכיוון השני של המשפט - נניח G עץ ונוכיח G קשיר מינימלי.
G עץ לכן G קשיר, נותר להוכיח שלכל $e\in E\left(G\right)$, $G\backslash e$ אינו קשיר.
נניח שקיים $e=\left(u,\,v\right)\in E\left(G\right)$ כך ש$G\backslash e$ קשיר. אזי ב$G\backslash e$ יש מסילה מu לv: $u,\,x_1,\,..,\,x_k,\,v$ ואז $u,\,x_1,\,...,\,x_k,\,v,\,u$ מעגל, בסתירה להנחה ולכן G קשיר מינימלי.

הגדרה

גרף מקסימלי ללא מעגלים הוא גרף $G=(V,E)$ ללא מעגלים (כלומר יער) כך שלכל זוג $u,v\in V$, אם $(u,v)\notin E$ אז הוספת הצלע (u,v) לG הופכת את G לגרף עם מעגלים.

תרגיל

G מקסימלי ללא מעגלים $\iff G$ עץ.

הגדרה

יהי $G=(V,E)$ גרף. עץ פורש של G הוא תת גרף פורש של G שהוא עץ.

גרסה של בעיית הסוכן הנוסע

בהינתן גרף קשיר $G=(V,E)$ מסדר n, מצא הילוך מאורך מינימלי שעובר על כל קדקדי G (מותר לבדוק לכל היותר n^k אפשרויות).
זו בעיית NP. נראה שקיים פתרון מקורב "קל".

טענה 5

לכל גרף קשיר סופי קיים עץ פורש.

הוכחה

G סופי לכן מס' הצלעות בG סופי.
G קשיר. אם G קשיר מינימלי אז G עץ, וסיימנו.
אם G אינו קשיר מינימלי אז קיימת צלע $e_1\in E$ כך ש$G\backslash e_1$ קשיר.
אם $G\backslash e_1$ קשיר מינימלי אז לפי טענה 4, $G\backslash e_1$ עץ פורש ולכן סיימנו.
אחרת, נשמיט צלע e_2 ב$G\backslash e_1$ כך ש$(G\backslash e_1)\backslash e_2$ קשיר, וחוזר חלילה.
מכיוון שמס' הצלעות סופי, התהליך חייב להעצר, והוא ייעצר בגרף קשיר מינימלי, שהוא העץ הפורש.

תרגיל

כתוב אלגוריתם למציאת עץ פורש לגרף נתון.

המשך בעיית הסוכן הנוסע

כעת נכתוב אלגוריתם מקורב לפתרון בעיית הסוכן הנוסע כפי שנוסחה לעיל.

1. מצא לגרף עץ פורש.
2. נעבור על העץ ב-DFS($Depth\ First\ Search$), וזה הילוך שהוא באורך לכל היותר פי 2 מההילוך המינימלי.