ליניארית 1- תרגיל 7 – מרחבים וקטורים

פתרון תרגיל 1:

סגירות לחבור- $a_k + b_k \in \mathbb{F} \Leftarrow \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)x^k \in \mathbb{F}_{\le n}[x]$.

איבר ניטראלי לחיבור- $\sum_{k=0}^{n} 0x^k = 0$ כלומר לכל $0 \le k \le n$ מתקיים $a_k = 0$.

ואז $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} 0x^k = \sum_{k=0}^{n}(a_k + 0)x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (לפי הגדרת החיבור).

אסוציאטיביות-

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n}(b_k + c_k)x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(a_k + (b_k + c_k))x^k \underset{\text{לפי אסוציטיביות בשדה}}{=} \sum_{k=0}^{n}((a_k + b_k) + c_k)x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)x^k + \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) + \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

קיום נגדי- כיוון ש-$\mathbb{F}$ שדה ולכן הוא גם חבורה חיבורית ולכן לכל $a_k \in \mathbb{F}$ קיים נגדי שיסומן $-a_k \in \mathbb{F}$ כך ש- $(a_k + (-a_k)) = 0$ ולכן

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} -a_k x^k = \sum_{k=0}^{n}(a_k + (-a_k))x^k = \sum_{k=0}^{n} 0x^k = 0$$

קומוטטיביות- כיוון ש-$\mathbb{F}$ שדה ולכן הוא גם חבורה חיבורית ולכן $a_k + b_k = b_k + a_k$ ולכן

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)x^k = \sum_{k=0}^{n}(b_k + a_k)x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

- פילוג לוקטורים-

$$\alpha\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) = \alpha\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha(a_k + b_k)x^k \underset{\text{פילוג בשדה}}{=}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(\alpha a_k + \alpha b_k)x^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} \alpha b_k x^k = \alpha\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + \alpha\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right)$$

- אדישות אבר יחידה לכפל בווקטור-

$$1\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} 1 a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

סגירות לכפל בסקלר- $\alpha a_k \in \mathbb{F} \Leftarrow \sum_{k=0}^{n}(\alpha a_k)x^k \in \mathbb{F}_{\le n}[x]$.

אסוציאטיביות כפל סקלרים בווקטור-

$$\alpha\beta\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n}((\alpha\beta)a_k)x^k \underset{\text{אסוציטיביות כפל בשדה}}{=} \sum_{k=0}^{n}(\alpha(\beta a_k))x^k = \alpha\left(\sum_{k=0}^{n} \beta a_k x^k\right) =$$
$$= \alpha\left(\beta\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\right)$$

פילוג לסקלרים-

$$(\alpha + \beta)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n}(\alpha + \beta)a_k x^k \underset{\text{פילוג בשדה}}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha a_k x^k + \beta a_k x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} \beta a_k x^k = \alpha\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + \beta\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)$$

שאלה 2

הוכיחו או הפריכו:

1. $V=\left\{\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C}\right\}$ ביחס לחיבור רכיבי וכפל בסקלר)כמו מטריצות (הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

תשובה

1. סגירות לחיבור : יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} \in V$, אזי

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z+w \\ \bar{z}+\overline{w} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z+w \\ \overline{z+w} \end{pmatrix} \in V$$

2. קומוטטיביות : יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} \in V$, אזי

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z+w \\ \bar{z}+\overline{w} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w+z \\ \overline{w}+\bar{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z+w \\ \bar{z}+\overline{w} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (z+w)+t \\ (\bar{z}+\overline{w})+\bar{t} \end{pmatrix}=$$ קומוטטיבי

3. אסוציאטיביות : יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix} \in V$, אזי

$$=\begin{pmatrix} z+(w+t) \\ \bar{z}+(\bar{w}+\bar{t}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w+t \\ \bar{w}+\bar{t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix}\right)$$

4. איבר אדיש: $0_v=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\in V$, שכן לכל $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}\in V$ מתקיים $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z+0 \\ \bar{z}+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$

5. איבר נגדי: לכל $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}\in V$ האיבר הנגדי הוא $\begin{pmatrix} -z \\ \overline{-z} \end{pmatrix}\in V$, שכן

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -z \\ \overline{-z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z-z \\ \bar{z}+\overline{-z} \end{pmatrix}=\underset{\downarrow}{\begin{pmatrix} z-z \\ \bar{z}+-(\bar{z}) \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0_v$$

לכל סקלר $\alpha\in\Re$, ובפרט עבור $\alpha=-1$ $\overline{\alpha z}=\alpha\bar{z}$.

6. סגירות לכפל בסקלר: לכל $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}\in V$ ולכל $\alpha\in\Re$ מתקיים $\alpha\cdot\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}=\underset{\downarrow}{\begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha\bar{z} \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} \alpha z \\ \overline{\alpha z} \end{pmatrix}\in V$

לכל סקלר $\alpha\in\Re$, ובפרט עבור $\alpha=-1$ $\overline{\alpha z}=\alpha\bar{z}$.

7. פילוג החיבור ב- V מעל הכפל בסקלר: לכל $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}\in V$, $\alpha\in\Re$ מתקיים

$$\alpha\cdot\left(\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}\right)=\alpha\cdot\begin{pmatrix} z+w \\ \bar{z}+\bar{w} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha(w+z) \\ \alpha(\bar{w}+\bar{z}) \end{pmatrix}\underset{\downarrow}{=}\begin{pmatrix} \alpha w+\alpha z \\ \alpha\bar{w}+\alpha\bar{z} \end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

פילוג מעל המרוכבים

8. פילוג הכפל מעל החיבור ב- F: לכל $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}\in V$, $\alpha,\beta\in\Re$ מתקיים

$$(\alpha+\beta)\cdot\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)z \\ (\alpha+\beta)\bar{z} \end{pmatrix}\underset{\downarrow}{=}\begin{pmatrix} \alpha z+\beta z \\ \alpha\bar{z}+\beta\bar{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha\bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta z \\ \beta\bar{z} \end{pmatrix}$$

פילוג מעל המרוכבים

9. אסוציאטיביות הכפל: לכל $\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} \in V$, $\alpha, \beta \in \Re$ מתקיים

$$(\alpha\beta)\cdot\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)z \\ (\alpha\beta)\overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta z) \\ \alpha(\beta\overline{z}) \end{pmatrix} = \alpha\cdot\begin{pmatrix} \beta z \\ \beta\overline{z} \end{pmatrix} = \alpha\cdot\left(\beta\cdot\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}\right).$$

10. זהות – לכל $\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} \in V$, מאחר שהאדיש הכפלי בשדה הוא 1, מתקיים

$$1\cdot\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1z \\ \overline{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1z \\ 1\overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}.$$

$V = \left\{\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C}\right\}$

<u>ב+ג)</u>

דוגמא נגדית:

ניקח $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, אזי $u, v \in V$ (נא לבדוק!) , אבל $v + u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$. עבור וקטור זה – מתקיים $x = y$, אך לא מתקיים $z = 2y + 3$, שכן $8 = z \neq 2y + 3 = 5$. לכן $u + v \notin V$.

$V = \{p(x) \in \Re[x] : 3 \leq \deg(p(x)) \leq 5\}$ ביחס לחיבור פולינומים הוא מרחב וקטורי

ניקח לדוגמא: $p(x) = x^4 + 2x^2$, $q(x) = -x^4 + x^2$. נובע כי מעלת p ומעלת q הן 4, וכן $p(x), q(x) \in V$, אבל $p(x) + q(x) = 3x^2$, מעלת פולינום זה היא 2, קטנה ממש מ- 3. לכן פולינום זה אינו שייך ל- V.

<u>שאלה 3:</u>

1) $W_1 = \{(x, y, z) | x = y\}$

כן תת מרחב .

***קיים איבר אדיש לסכום**

$$0_{W_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1, \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W_1$$

** סגירות לחיבור
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \in W_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in W_1$$

***** סגירות לכפל בסקלר**

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \in W_1, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_2 \\ \alpha a_2 \\ \alpha b_2 \end{pmatrix} \in W_1$$

(2) $W_2 = \left\{ (x, y, z) \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$

אינו תת מרחב . למשל לא מקיים סגירות לקפל בסקלר

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W_1, \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\alpha \neq 1 \in \mathbb{R}, \alpha \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}, (\alpha x)^2 + (\alpha y)^2 + (\alpha z)^2 = \alpha^2 (x^2 + y^2 + z^2) = \alpha^2 \notin W_1$$

(3) $W_3 = \left\{ (x, y, z) \middle| x^2 + y^2 = z^2 \right\}$

אינו תת מרחב, אין סגירות לחיבור , למשל :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \sqrt{53} \end{pmatrix} \in W_3, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \sqrt{53} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 5 + \sqrt{53} \end{pmatrix}, 5^2 + 11^2 \neq (5 + \sqrt{53})^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 5 + \sqrt{53} \end{pmatrix} \notin W_3$$

(4) $W_4 = \left\{ (x, y, z) \middle| y = 0 \right\}$

כן תת מרחב .

*קיים איבר אדיש לסכום

$$0_{W_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in W_4,\begin{pmatrix}y\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y\\z\end{pmatrix}\in W_4$$

** סגירות לחיבור

$$\begin{pmatrix}a_1\\0\\b_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\0\\b_2\end{pmatrix}\in W_4\Rightarrow\begin{pmatrix}a_1\\0\\b_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2\\0\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2\\0\\b_1+b_2\end{pmatrix}\in W_4$$

*** סגירות לכפל בסקלר

$$\begin{pmatrix}a_1\\0\\b_1\end{pmatrix}\in W_4,\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow\alpha\bullet\begin{pmatrix}a_1\\0\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_2\\0\\\alpha b_2\end{pmatrix}\in W_4$$

<u>שאלה 4:</u>

כדי להוכיח שמרחב המכפלה הוא מרחב וקטורי יש להראות שכל האקסיומות מתקיימות:

<u>סגירות החיבור</u>

$$(v_1,u_1),(v_2,u_2)\in U\times V\Rightarrow(v_1,u_1)+(v_2,u_2)=(v_1+v_2,u_1+u_2)\in U\times V$$

מכיוון ש $v_1+v_2\in V,u_1+u_2\in U$ V,U תתי מרחב.

<u>קיבוץ</u>

$$
\begin{aligned}
&(v_1,u_1),(v_2,u_2),(v_3,u_3)\in U\times V \Rightarrow\\
&((v_1,u_1)+(v_2,u_2))+(v_3,u_3)\\
&=((v_1+v_2),(u_1+u_2))+(v_3,u_3)\\
&=((v_1+v_2)+v_3,(u_1+u_2)+u_3)=(v_1+(v_2+v_3),u_1+(u_2+u_3))\\
&=(v_1,u_1)+((v_2,u_2)+(v_3,u_3))
\end{aligned}
$$

<u>איבר ניטרלי</u>

מכיון ש V,U **מרחבים וקטורים, קיים איבר ניטרלי** $0_v\in V, 0_u\in U$ **כך ש**

$(u,v)+(0_u,0_v)=(u+0_u,v+0_v)=(u,v)$ **, לכן** $(0_u,0_v)\in U\times V$ **הוא איבר ניטרלי.**

<u>איבר נגדי</u>

$(u,v)\in U\times V$ **מכיוון ש** U,V **מרחבים וקטורים ,**

קיים איבר נגדי בכל מרחב, $-u\in U,(-u)+u=0_u$ **, וגם**

$-v\in V,(-v)+v=0_v$.

לכן מתקיים :

$$(u,v)+(-u,-v)=(u+(-u),v+(-v))=(0_u,0_v)\in U\times V$$

<u>חילוף</u>

יהיו $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in U\times V$, מכיוון ש U,V **מרחבים וקטורים מתקיים**

$u_1+u_2=u_2+u_1,v_1+v_2=v_2+v_1$ **, ואז**

$$(u_1,v_1)+(u_2,v_2)=(u_1+u_2,v_1+v_2)=(u_2+u_1,v_2+v_1)=(u_2,v_2)+(u_1,v_1)$$

<u>סגירות לכפל בסקלר :</u>

יהיו $(u_1,v_1)\in U\times V$, מכיוון ש U,V **מרחבים וקטורים , קיים** $\alpha\in F$ **כך**

שמתקיים

$\alpha\bullet u_1\in U,\alpha\bullet v_1\in V$ **, לכן** $\alpha\bullet(u_1,v_1)=(\alpha\bullet u_1,\alpha\bullet v_1)\in U\times V$

<u>קיבוץ:</u>

יהי $(u,v)\in U\times V,\alpha,\beta\in F$, מכיוון ש U,V **מרחבים וקטורים**

$(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)\wedge(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$, אז

$$(\alpha\beta)(u,v)=((\alpha\beta)u,(\alpha\beta)v)=(\alpha(\beta u),\alpha(\beta v))$$
$$=\alpha(\beta u,\beta v)=\alpha(\beta(u,v))$$

<u>קיום אדיש כפלי :</u>

יהי $(u,v)\in U\times V$, מאחר שהאדיש הכפלי בשדה הוא 1, לכן מתקיים

$$1\cdot(u,v)=(1\cdot u,1\cdot v)=(u,v)$$

<u>פילוג:</u>

יהיו $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in U\times V$, מכיוון ש U,V **מרחבים וקטורים מתקיים**

$$\alpha\bullet(u_1+u_2)=\alpha\bullet u_1+\alpha\bullet u_2$$
$$\alpha\bullet(v_1+v_2)=\alpha\bullet v_1+\alpha\bullet v_2$$

לכן מתקיים

$$\alpha\bullet((u_1,v_1)+(u_2,v_2))=\alpha\bullet((u_1+u_2),(v_1+v_2))$$
$$=(\alpha\bullet(u_1+u_2),\alpha\bullet(v_1+v_2))=(\alpha\bullet u_1+\alpha\bullet u_2,\alpha\bullet v_1+\alpha\bullet v_2)$$
$$(\alpha\bullet u_1,\alpha\bullet v_1)+(\alpha\bullet u_2,\alpha\bullet v_2)=\alpha\bullet(u_1,v_1)+\alpha\bullet(u_2,v_2)$$

גם עבור $\alpha,\beta\in F$ מכיוון ש U,V **מרחבים וקטורים מתקיים :**

$$(\alpha+\beta)\bullet u=\alpha\bullet u+\beta\bullet u$$
$$(\alpha+\beta)\bullet v=\alpha\bullet v+\beta\bullet v$$

ואז עבור $(u,v)\in U\times V$, מתקיים

$$(\alpha+\beta)\bullet(u,v)=((\alpha+\beta)\bullet u,(\alpha+\beta)\bullet v)$$
$$=(\alpha\bullet u+\beta\bullet u,\alpha\bullet v+\beta\bullet v)=(\alpha\bullet u,\alpha\bullet v)+(\beta\bullet u,\beta\bullet v)$$
$$=\alpha\bullet(u,v)+\beta\bullet(u,v)$$

<u>שאלה 5:</u>

צריך להוכיח שני דברים:

1. V=U+W.
2. U∩W={0}.

אכן,

1. ההכלה בכיוון ⊇:

U ו-W הם תתי-מרחבים של V, ולכן גם U+W תת-מרחב של V (לפי משפט שהוכחתם בהרצאה)

2. ההכלה⊆

תהי

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in V$$

צריך להוכיח כי.A∈U+W

כלומר, צריך למצוא B∈U ו C∈W עבורן A=B+C

המטריצות B ו C-המתאימות ה

$$B=\begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix}\in U \quad ,C=\begin{pmatrix} -c & b \\ c & -b \end{pmatrix}\in W \quad ,$$

(2

תהי $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in U\cap W$

ולכן, A∈U, ואז $c=b=0$

ומכיוון ש $A\in W$, אז $\left.\begin{array}{l} c=-a \\ d=-b \end{array}\right\}\Rightarrow c=d=0$

ואז קיבלנו $A=0$.