ב"ש אלגברה לינארית תשפב מועד ב

.1

(א) יהא מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ (שאינו ממשי) המקיים את המשוואה $z + \frac{1}{z} = 2\cos(b)$ כאשר b ממשי.

i. הביעו באמצעות הפרמטר b את z. מצאו את שתי הפתרונות.פתרון: כיוון ש $z \neq 0$ (אחרת לא היה לו הופכי ולא היה משמעות לנתוני השאלה) נוכל להכפיל ב z ונקבל את המשוואה השקולה

$$z^2 - 2\cos(b)z + 1 = 0$$

שנוכל לפתור עם נוסחת השורשים הידועה:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{2\cos(b) \pm \sqrt{4\cos^2(b) - 4}}{2} \\ &= \frac{2\cos(b) \pm 2\sqrt{\cos^2(b) - 1}}{2} \\ &= \frac{2\cos(b) \pm 2\sqrt{-\sin^2(b)}}{2} \\ &= \cos(b) \pm i\sin(b) \\ &= \text{cis}\left(\pm b\right) \end{aligned}$$

ii. האם הביטוי $z^n + \frac{1}{z^n}$ הוא ממשי טהור, מדומה טהור או לא זה ולא זה? (כאשר z המספר הנתון ו n טבעי).פתרון: ראינו ש $z = \text{cis}\left(\pm b\right)$ לכן $\frac{1}{z} = \text{cis}\left(\mp b\right)$ ואז

$$z^n + \frac{1}{z^n} = z^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n = \text{cis}(nb) + \text{cis}(-nb) = 2\cos\left(nb\right)$$

שהוא ממשי טהור.

פתרון נוסף - נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי או 0 מתקיים כי $z^n + \frac{1}{z^n}$ ממשי:

- בסיס - $n = 1, 0$: נתון ש $z + \frac{1}{z}$ ממשי. וגם $z^0 + \frac{1}{z^0} = 2$ ממשי.
- צעד: נניח שלכל k בין 0 ל n טבעי מתקיים כי $z^k + \frac{1}{z^k}$ ממשי (זוהי הנחת האינדוקציה כי הטענה מתקיימת עד n מסוים). נוכיח כי $z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}$ ממשי. אכן : מתקיים כי

$$\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) + \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right)$$

ולכן

$$z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}=\left(z^{n}+\frac{1}{z^{n}}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)-\left(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}\right)$$

וכיוון שכל המספרים בסוגרים ממשיים לפי הנחת האינדוקציה, נקבל את המבוקש שגם $z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}$ ממשי ככפל וחיסור של מספרים ממשיים.

(ב) נתון כי מספר מרוכב z נמצא ברביע הראשון מחוץ למעגל היחידה. סרטטו במערכת צירים את מעגל היחידה, ומקמו בסרטוט את z ואת $\frac{1}{z},\frac{1}{\overline{z}},z+\overline{z}$.

פתרון: נניח שהקורא יודע לצייר את מעגל היחידה. אם $z=r\operatorname{cis}(\alpha)$ ברביע הראשון מחוץ למעגל היחידה אזי $\overline{z}$ נמצא ברביע הרביעי מחוץ למעגל היחידה (תמונת ראי של z כאשר הראי הוא ציר x). המספר $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\alpha)$ יהיה במרחק $\frac{1}{r}<1$ ולכן בתוך מעגל היחידה, ברביע הרביעי ($0\le\alpha\le90^\circ$ גורר $-90^\circ\le-\alpha\le0$). מאותו הסבר $\frac{1}{\overline{z}}$ יהיה ברביע הראשון בתוך מעגל היחידה. המספר $z+\overline{z}=2Re(z)$ יהיה על ציר x החיובי ויכול להיות בתוך או מחוץ מעגל היחידה, כתלות ב $Re(z)$.

2. יהי $a\in\mathbb{R}$ פרמטר ונביט במערכת המשוואות:

$$\begin{cases}x+y & =a\\ ax+2ay & =a^{2}+1\\ x+y+\left(a^{2}-1\right)z & =a^{2}-2a+2\end{cases}$$

(א) מצאו לכל ערכי הפרמטר האם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או שאין פתרון.

פתרון: נעביר את מערכת המשוואות לייצוג במטריצה ונדרג אותה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & a\\ a & 2a & 0 & a^{2}+1\\ 1 & 1 & a^{2}-1 & a^{2}-2a+2\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-aR_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & a\\ 0 & a & 0 & 1\\ 0 & 0 & a^{2}-1 & a^{2}-3a+2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & a\\ 0 & a & 0 & 1\\ 0 & 0 & (a-1)(a+1) & (a-1)(a-2)\end{array}\right)$$

וכעת:

אם $a\neq0,\pm1$ נקבל שיש לנו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד.

נטפל בשאר המקרים:

- $a=-1$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right)$$

שיש בה שורת סתירה (שורה שלישית) ולכן במקרה זה לא יהיה פתרון.

- $a=0$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{array}\right)$$

שיש בה שורת סתירה (שורה שניה) ולכן במקרה זה לא יהיה פתרון.

- $a=1$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהיא בצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (z) ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

לסיכום: עבור $a \neq 0, \pm 1$ יש פתרון יחיד. עבור $a=-1,0$ לא יהיה פתרון ועבור $a=1$ יהיו אינסוף פתרונות.

(ב) עבור $a=1$, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת.

פתרון: ראינו שעבור $a=1$ נקבל את המערכת (ונמשיך לדרג)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהפתרון שלה הוא (אם נציב $z=t$)

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}\right\}$$

(ג) עבור $a=2$, מצאו את הפתרון של המערכת.

פתרון: נציב $a=2$ בצורה מדורגת שהגענו אליה ונמשיך לדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

שהפתרון שלה הוא

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. נביט במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(א) מצאו את המטריצה ההופכית A^{-1}.

פתרון: נשתמש באלגורתים להפיכת מטריצה ונדרג את המטריצה $(A|I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ולכן ההופכית היא

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) מצאו בסיסים ומימדים למרחבים $C(A), R(A)$.

פתרון: כיוון שהמטריצה הפיכה (וגם מהדירוג הקודם) נקבל שהצורה הקנונית של A היא I: כלומר

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן: שורות שונות מאפס בצורה מדורגת

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מהווים בסיס ל $R(A)$ ומימדו 3.

עמודות במטריצה A, שבצורה מדורגת יש בהם איבר פותח (עמודות $1+2+3$),

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מהוות בסיס ל $C(A)$ ומימדו 3.

לשם מציאת בסיס ל $N(A)$ נפתור את המערכת ההומוגנית, שפתרונה היחיד הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\{\} = \emptyset$ בסיס ל $N(A)$ ומימדו 0.

(ג) מצאו את מימד מרחב הפתרונות $N(A)$.

פתרון: ענינו בסעיף הקודם.

4. נביט בתתי המרחבים

$$U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \mid x+y-z=0\right\}$$

$$W=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

(א) מצאו בסיס ל $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ כך ש $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\notin W$.

פתרון: נציג את W על ידי מערכת משוואות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\1&0&1&y\\1&1&0&z\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\0&0&0&y-x\\0&1&-1&z-x\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\0&1&-1&z-x\\0&0&0&y-x\end{array}\right)$$

ולכן

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \mid y-x=0\right\}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\notin W$$

כי אינו מקיים את המשוואה $y-x=0$.

(ב) מצאו בסיס ומימדים ל U,W.

פתרון: המרחב U: נמצא בסיס על ידי פתירת מערכת המשוואות $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\end{array}\right)$ שמייצת את U. נציב במשתנים החופשיים $y=t,z=s$ ונקבל ש

$$U=\left\{\begin{pmatrix}s-t\\t\\s\end{pmatrix}\ \mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ \mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל U ומימדו 2.

המרחב W: נמצא בסיס על ידי פתירת מערכת המשוואות$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ שמייצת את W. נציב במשתנים החופשיים $y=t, z=s$ ונקבל ש

$$U=\left\{\begin{pmatrix} t \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל W ומימדו 2.

(ג) מצאו בסיס ומימד ל $U\cap W$.

פתרון: נקבל ש

$$U\cap W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{c} x+y-z=0 \\ -x+y=0 \end{array}\right\}$$

ונפתור את מערכת המשוואות$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ שמייצת את $U\cap W$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

נציב במשתנה החופשי $z=t$ ונקבל ש

$$U\cap W=\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ונקבל ש

$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל $U\cap W$ ומימדו 1.