תרגול אנליזה מודרנית 9

תזכורת: יהי $\left(X,S,\mu\right)$ ממ"ח. מרחב לבג ממעלה $1\le p<\infty$ מוגדר ע"י

$L^p\left(X,S,\mu\right)=\left\{f:\int_X |f|^p\,d\mu<\infty\right\}$. מגדירים בנוסף $\|f\|_p:=\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$ כך שבעצם

$L^p\left(X,S,\mu\right)=\left\{f:\|f\|_p<\infty\right\}$ סימונים נוספים הם $L^p\left(X\right),L^p\left(\mu\right),L^p\left(d\mu\right)$.

ישנו גם המרחב $L^\infty\left(X\right)$ המכיל את כל הפונקציות החסומות בעיקר: $L^\infty\left(X\right)=\left\{f:\|f\|_\infty<\infty\right\}$

כאשר $\left(f\right)$ $\|f\|_\infty=\inf_{f\sim g}\sup_{x\in X}\left|g\left(x\right)\right|=\operatorname{ess\,sup}_X$ או $\|f\|_\infty=\inf\left\{M:\mu\left(\left\{x:\left|f\left(x\right)\right|\ge M\right\}\right)=0\right\}$.

תזכורת: (א"ש הולדר)

אם $1<p,q<\infty$ ו $p^{-1}+q^{-1}=1$ אז

$$\int|fg|\,d\mu\le\|f\|_p\,\|g\|_q$$

אי השוויון נכון גם עבור $p=1$ ו $q=\infty$.

1. תרגיל: נניח כי $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות, בעלת "תנאי שפה הומוגניים" $f\left(a\right)=f\left(b\right)=0$ ומקיימת $\int_a^b f^2dm=1$. הוכיחו כי מתקיים $\int_a^b xff'dm=-\frac{1}{2}$ וגם

$$\left[\int_a^b\left(f'\right)^2dm\right]\left[\int_a^b x^2f^2dm\right]\ge\frac{1}{4}$$

פתרון: הכל רציף ולכן נעבוד עם אינטגרל רימן. נשתמש באינטגרציה לפי חלקים:

$$1=\int_a^b f^2\left(x\right)dx=xf^2\left(x\right)\Big|_a^b-\int_a^b 2xf\left(x\right)f'\left(x\right)dx\Rightarrow\int_a^b xf\left(x\right)f'\left(x\right)dx=-\frac{1}{2}$$

ניקח ערך מוחלט לקבל

$$\frac{1}{2}=\left|\int_a^b xf\left(x\right)f'\left(x\right)dx\right|\le\int_a^b\left|xf\left(x\right)f'\left(x\right)\right|dx=\|xff'\|_1\overset{H\ddot{o}lder}{\le}\|f'\|_2\,\|xf\|_2=\left[\int_a^b\left(f'\left(x\right)\right)^2dx\right]^{1/2}\left[\int_a^b x^2f\left(x\right)^2dx\right]^{1/2}$$

נעלה בריבוע לקבל $\frac{1}{4}\le\left[\int_a^b\left(f'\left(x\right)\right)^2dx\right]\left[\int_a^b x^2f\left(x\right)^2dx\right]$.

2. תרגיל: יהי $\left(X,S,\mu\right)$ ממ"ח ממידה סופית (כלומר $\mu\left(X\right)<\infty$) ויהיו $1\le r<p<\infty$.
הוכיחו כי $L^p\left(X,S,\mu\right)\subseteq L^r\left(X,S,\mu\right)$.

<u>פתרון:</u> תהי $f\in L^p$ המספרים $t=\frac{p}{r},s=\frac{p}{p-r}$ הם מעריכים צמודים (סכום ההופכיים 1), וע"פ א"ש הולדר

$$\|f\|_r^r=\int_X|f|^r\cdot 1d\mu=\left\||f^r|\cdot 1\right\|_1\le\left(\int_X\left(|f|^r\right)^t d\mu\right)^{1/t}\left(\int_X 1^s d\mu\right)^{1/s}=\left(\int_X|f|^p d\mu\right)^{1/t}\mu\left(X\right)^{1/s}<\infty$$

ומכאן $\|f\|_r<\infty$ ולכן $f\in L^r$.

<u>דוגמה:</u> הממ"ח $\left([0,1],L,m\right)$ סופי. ידוע כי $x^{-1/4}\in L^2\left([0,1]\right)$ ($\int_0^1 x^{-1/2}dm\left(x\right)=2\sqrt{x}\Big|_0^1=2<\infty$)

ולכן מתקיים $x^{-1/4}\in L^1$ או $\int_0^1 x^{-1/4}dm\left(x\right)<\infty$.

<u>הערה:</u> אם הממ"ח אינו סופי, אין הכלה בשום כיוון.

3. <u>תרגיל:</u> נתבונן בממ"ח $\left([0,1],L,m\right)$, ונגדיר סדרת פונקציות ע"י $g_n\left(x\right)=n\cdot I_{[0,n^{-3}]}\left(x\right)$.

א. הוכיחו כי לכל $f\in L^2\left([0,1]\right)$ מתקיים $\int_0^1 f\left(x\right)g_n\left(x\right)dm\left(x\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

ב. הראו שיש $f\in L^1\left([0,1]\right)$ עבורה $\int_0^1 f\left(x\right)g_n\left(x\right)dm\left(x\right)\overset{n\to\infty}{\not\to}0$

<u>פתרון:</u> א.

$$d\left(\int_0^1 f\left(x\right)g_n\left(x\right)dm\left(x\right),0\right)=\left|\int_0^1 f\left(x\right)g_n\left(x\right)dm\left(x\right)-0\right|\le\int_0^1\left|f\left(x\right)g_n\left(x\right)\right|dm\left(x\right)\le\|f\|_2\|g_n\|_2$$

וניתן לחשב $\|g_n\|_2=\left(\int_0^1\left|n\cdot I_{[0,n^{-3}]}\right|^2dm\right)^{1/2}=\left(\int_0^1 n^2 I_{[0,n^{-3}]}dm\right)^{1/2}=\left(n^2 m\left(\left[0,n^{-3}\right]\right)\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{n}}$

כלומר $\left|\int_0^1 f\left(x\right)g_n\left(x\right)dm\left(x\right)-0\right|\le\frac{\|f\|_2}{\sqrt{n}}\xrightarrow{n\to\infty}0$ כנדרש (ע"פ תרגיל קודם ניתן להחליף את L^2 בכל מרחב $L^{p>2}$).

ב. ניקח $f=x^{-2/3}\in L^1([0,1])$ (f אינטגרבילית לבג כי היא אינט' רימן בהחלט) . נחשב

$$\int_0^1 f(x)g_n(x)dm(x)=\int_0^{n^{-3}} x^{-2/3}ndm(x)=3x^{1/3}n\Big|_{x=0}^{x=n^{-3}}=3\xrightarrow{n\to\infty}3\neq 0 .$$

4. <u>תרגיל:</u> יהיו $(X,\|\ \|_X),(Y,\|\ \|_Y)$ שני מרחבי בנך. ניתן למכפלה הקרטזית $X\times Y$ מבנה לינארי ע"י $\alpha(x,y):=(\alpha x,\alpha y)$, $(x_1,y_1)+(x_2,y_2):=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ ו-

$$\|(x,y)\|:=\|x\|_X+\|y\|_Y$$

הוכיחו כי $(X\times Y,\|\ \|)$ מרחב בנך.

<u>פתרון:</u> תהי $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב- $X\times Y$, ויש להוכיח שיש לה גבול שם. ביתר פירוט, לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $m,n\geq N$ אזי $\|(x_m,y_m)-(x_n,y_n)\|<\varepsilon$ ז"א $\|(x_m-x_n,y_m-y_n)\|=\|x_m-x_n\|_X+\|y_m-y_n\|_Y<\varepsilon$. מכאן שלכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $m,n\geq N$ אזי $\|x_m-x_n\|_X<\varepsilon$ וגם $\|y_m-y_n\|_Y<\varepsilon$. קיבלנו שהסדרות $\{x_n\}\subseteq X,\{y_n\}\subseteq Y$ הן סדרות קושי, ומאחר ואילו מרחבי בנך הסדרות מתכנסות: $x_n\to x, y_n\to y$. נטען כי הגבול של סדרתנו הוא $(x_n,y_n)\to(x,y)$. הוכחה:

$\|(x_n,y_n)-(x,y)\|=\|(x_n-x,y_n-y)\|\leq\|x_n-x\|_X+\|y_n-y\|_Y\to 0$. מש"ל.

5. נניח כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שייכת ל L^p עבור $p>1$ מסויים וכן גם ב L^1 . הראו כי קיימים קבועים $c>0$ ו $\alpha\in(0,1)$ כך ש

$$\int_A |f(x)|dx\leq cm(A)^{\alpha}$$

פתרון: מזה ש $f\in L^1$ אנחנו יודעים כי $\int_A|f(x)|dx<\infty$. מכיוון ש $f\in L^p$ עבור $p>1$ נסמן את הנורמה שלו ב $\|f\|_p=c$.עפ"י א"ש הולדר נקבל

$$\|f1_A\|_1\leq\|f\|_p\|1_A\|_q$$

$$\Leftrightarrow\int_{\mathbb{R}}|f(x)1_A(x)|dx=\int_A|f(x)|dx\leq\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}}1_A(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=cm(A)^{\frac{1}{q}}$$

נותר להראות כי $\frac{1}{q}\in(0,1)$. $q=\frac{p}{p-1}>1\Rightarrow\frac{1}{q}\in(0,1)$.

6. יהי (X,S,μ) ממ"ח כך ש $\mu(X)=1$, ותהי $g:X\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית ו f פונקציה קמורה . הוכיחו את אי שוויון יאנסן

$$f\left(\int g d\mu\right)\le\int f(g)d\mu \text{ .}$$

פתרון: נשתמש בתכונה של פונקציות קמורות: קיים מספר ממשי c כך שמתקיים $f(y)\ge f(x)+c(y-x)$ לכל $y\in\mathbb{R}$. נציב $x=\int f(g)d\mu$ ו $y=g$ נבצע אינטגרציה לשני האגפים ונקבל מלינאריות האינטגרל כי

$$\int f(g)d\mu\ge\int f\left(\int g d\mu\right)+c\left(g-\left(\int g d\mu\right)\right)d\mu=$$

$$f\left(\int g d\mu\right)+c\left(\left(\int g d\mu\right)-\left(\int g d\mu\right)\right)=f\left(\int g d\mu\right)$$