אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 8

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

שאלה 1

א. הוכיחו שאיבר $a \in R$ הוא אי פריק אם ורק אם האידיאל Ra מקסימאלי בין כל האידיאליים הראשיים (האמיתיים) של R.

ב. אם $p \in R_0 \subseteq R$. הראה ע"י דוגמאות נגדיות כי p יכול להיות אי פריק ב R ופריק ב R_0 ולהיפך.

פתרון

א.

$\Leftarrow$

נניח בשלילה שקיים אידיאל ראשי כך ש $Ra \subset Rb \subset R$ ז"א $a \in Rb$ ולכן קיים $y \in R$ כך ש $a = yb$.

מכיוון ש $Rb \neq R$ אז b לא הפיך ומכיוון ש $Ra \neq Rb$ y לא הפיך בסתירה לכך ש $a \in R$ הוא אי פריק.

$\Rightarrow$

נניח בשלילה ש $a \in R$ הוא פריק, ז"א קיימים $x, y \in R$ לא הפיכים כך ש $a = xy$ ולכן $Ra \subseteq Ry \neq R$ ומכיוון ש x לא הפיך $Ra \neq Ry$.

ב. x^2+1 הוא אי פריק ב $\mathbb{R}[x]$ אבל פריק ב $\mathbb{C}[x]$ כי $x^2+1=(x-i)(x+i)$

שאלה 2

יהי $f(x) = x^4 + p^2$ פולינום ב $\mathbb{Z}[x]$. כאשר $p > 2$ ראשוני. על פי הפירוק של f לגורמים ליניאריים מעל שדה המרוכבים, פרקו את f למכפלת שני פולינומים ריבועיים מעל שדה הממשיים. הראו ש f אי פריק מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון

מכיוון ש $2i = (1+i)^2$, $-2i = (1-i)^2$ נקבל ש

$$x^4 + p^2 = (x^2 - pi)(x^2 + pi) = \left(x^2 - \frac{1}{2}p \cdot 2i\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}p \cdot 2i\right) = \left(x^2 - \frac{1}{2}p \cdot (1+i)^2\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}p \cdot (1-i)^2\right) =$$

$$= \left(x - \sqrt{\frac{p}{2}}(1+i)\right)\left(x + \sqrt{\frac{p}{2}}(1+i)\right)\left(x - \sqrt{\frac{p}{2}}(1-i)\right)\left(x + \sqrt{\frac{p}{2}}(1-i)\right)$$

וקיבלנו פירוק ליניארי של f מעל שדה המרוכבים.

$$\left(x-\sqrt{\frac{p}{2}}(1+i)\right)\left(x+\sqrt{\frac{p}{2}}(1+i)\right)\left(x-\sqrt{\frac{p}{2}}(1-i)\right)\left(x+\sqrt{\frac{p}{2}}(1-i)\right)=$$

$$\left(x-\sqrt{\frac{p}{2}}(1+i)\right)\left(x-\sqrt{\frac{p}{2}}(1-i)\right)\left(x+\sqrt{\frac{p}{2}}(1+i)\right)\left(x+\sqrt{\frac{p}{2}}(1-i)\right)=$$

$$\left(\left(x-\sqrt{\frac{p}{2}}\right)-\sqrt{\frac{p}{2}}i\right)\left(\left(x-\sqrt{\frac{p}{2}}\right)+\sqrt{\frac{p}{2}}i\right)\left(\left(x+\sqrt{\frac{p}{2}}\right)+\sqrt{\frac{p}{2}}i\right)\left(\left(x+\sqrt{\frac{p}{2}}\right)-\sqrt{\frac{p}{2}}i\right)=$$

$$\left(\left(x-\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^2+\frac{p}{2}\right)\left(\left(x+\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^2+\frac{p}{2}\right)=$$

$$\left(x^2-2\sqrt{\frac{p}{2}}x+p\right)\left(x^2+2\sqrt{\frac{p}{2}}x+p\right)$$

הפולינומים $\left(x-\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^2+\frac{p}{2}$, $\left(x+\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^2+\frac{p}{2}$ אינם פריקים מעל הממשיים.

מכיוון ש $\sqrt{\frac{p}{2}}\notin\mathbb{Q}$ הפולינומים לא שייכים ל $\mathbb{Q}[x]$. מכיוון שחוג פולינומים מעל שדה הוא תחום פריקות יחידה לא קיים פירוק לפולינום מדרגה 1 ופולינום מדרגה 3.

<u>שאלה 3</u>

הוכיחו כי הפולינום $x^3y+x^3-x^2y+xy-x^2+y^2+x+2y+2$ הוא אי פריק ב $\mathbb{Z}[x,y]$.

<u>פתרון</u>

$$x^3y+x^3-x^2y+xy-x^2+y^2+x+2y+2=y^2+x^3(y+1)-x^2(y+1)+x(y+1)+2(y+1)=$$
$$y^2+y\left(x^3-x^2+x+2\right)+\left(x^3-x^2+x+2\right)$$

נוכיח שלפולינום x^3-x^2+x+2 אין שורשים ב $\mathbb{Z}$ ואז x^3-x^2+x+2 אי פריק ב $\mathbb{Z}[x]$ ולכן ראשוני ב $\mathbb{Z}[x]$.

על פי המשפט: יהי $f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$. אם $\frac{k}{l}\in\mathbb{Q}$ הוא שורש של f כאשר $(k,l)=1$ אז $k|a_0, l|a_n$.

נניח ש $k\in\mathbb{Z}$ הוא שורש של הפולינום אז $l=1$ ו $k|2$ ז"א $k=\pm1\vee k=\pm2$ אבל גם $k=\pm1$ וגם $k=\pm2$ לא שורשים של x^3-x^2+x+2.

נשתמש עתה בקריטריון של אייזנשטיין בחוג $\mathbb{Z}[x,y]=\mathbb{Z}[x][y]$ עם $p=x^3-x^2+x+2$ עבור הפולינום $y^2+y\left(x^3-x^2+x+2\right)+\left(x^3-x^2+x+2\right)$.

<u>שאלה 4</u>

מצאו את האידיאלים המקסימליים בחוג המנה $\mathbb{Q}[x]\big/\left\langle (x-5)^2(x-4)\right\rangle$.

__פתרון__

לפי משפט ההתאמה האידיאלים המקסימליים בחוג המנה הם האידיאלים המקסימליים המכילים את $\left\langle (x-5)^2(x-4)\right\rangle$ ב $\mathbb{Q}[x]$.

$\mathbb{Q}[x]$ הוא תחום ראשי ולכן $I=\left\langle f(x)\right\rangle \subseteq \left\langle (x-5)^2(x-4)\right\rangle$ כך ש $f(x)$ אי פריק ב $\mathbb{Q}[x]$.

בחוג ראשי האידיאל הוא מקסימאלי אם ורק אם הוא נוצר ע"י איבר אי פריק. האידיאלים המקסימליים הם בדיוק אלו הנוצרים ע"י האיברים האי פריקים ב $\left\langle (x-5)^2(x-4)\right\rangle$ שהם $\left\langle (x-5)\right\rangle, \left\langle (x-4)\right\rangle$.

__שאלה 5__

הראה כי אם R חוג קומוטטיבי עם יחידה ו $f,g\in R[x]$ כך ש $g(x)$ פולינום מתוקן, אזי קיימים $r,q\in R[x]$ כך ש $f=gq+r$ וגם $\deg(r)<\deg(g)$ או $r=0$.

__פתרון__

נוכיח באינדוקציה על $\deg f=n$. אם $\deg f<\deg g$ אז ניקח $q=0, r=f$.

נניח ש $\deg f\ge \deg g$.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0,\ g(x)=x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0$, כאשר $a_n\ne 0, m\le n$.

מתקיים (*) $f=g\left(a_nx^{n-m}\right)+f_1$ ואז $f_1=f-g\left(a_nx^{n-m}\right)=0x^n+\dots$.

כעת $\deg f_1\le n-1$, ועל פי הנחת האינדוקציה קיימים q_1, r כך ש $f_1=gq_1+r$ ו $\deg r<\deg g$

נציב ב (*) ונקבל $f=g\left(a_nx^{n-m}\right)+gq_1+r=g\left(a_nx^{n-m}+q_1\right)+r$. כנדרש

__שאלה 6__

א. יהי $\left\langle -5+\sqrt{3}\right\rangle \lhd \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ הוכיחו בעזרת הנורמה של $-5+\sqrt{3}$ כי בחוג המנה $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]\big/\left\langle -5+\sqrt{3}\right\rangle$ יש 22 איברים.

ב. נגדיר $\varphi:\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]\to \mathbb{Z}_{11}$ ע"י $\varphi\left(a+\sqrt{3}b\right)=a+5b$. הוכיחו שזהו אפימורפיזם.

ג. הוכיחו על סמך סעיף א ש $\left\langle -5+\sqrt{3}\right\rangle \subset \ker\varphi$ (מכיל ממש).

ד. הראו ש $11\notin \left\langle -5+\sqrt{3}\right\rangle$ אבל $11\in \ker\varphi$.

ה. הוכיחו כי $\mathbb{Z}_{11}\cong \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]\big/\left\langle 11,-5+\sqrt{3}\right\rangle$.

פתרון

לשם נוחות נסמן $I=\left\langle -5+\sqrt{3}\right\rangle$.

א. נשים לב ש $a+b\sqrt{3}-(a+5b)=b\left(-5+\sqrt{3}\right)\in I$ לכן $a+b\sqrt{3}+I=a+5b+I$.

$N\left(-5+\sqrt{3}\right)=\left(-5+\sqrt{3}\right)\left(-5-\sqrt{3}\right)=22\in I$, בפרט לכל $k\in\mathbb{Z}$ $22k,22k\sqrt{3}\in I$, לכן עבור

איבר כללי $a+b\sqrt{3}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ כאשר $a,b\in\mathbb{Z}$ מתקיים ש

$a+b\sqrt{3}+I=(a\bmod 22)+(b\bmod 22)\sqrt{3}+I$.

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]/I=\left\{a+b\sqrt{3}+I:a,b\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{a+5b+I:a,b\in\mathbb{Z}\right\}=$$
$$\left\{(a+5b)(\bmod 22)+I:a,b\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{c+I:0\le c<22\right\}$$

נותר להוכיח שאם $0\le c_1\ne c_2<22$ אז $c_1+I\ne c_2+I$ נניח ב.ה.ג.כ ש $c_1<c_2$. נניח בשלילה ש

$c_1+I=c_2+I$ אזי $d=c_2-c_1\in I$ ז"א קיים $\alpha\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ כך ש $d=\alpha\cdot\left(-5+\sqrt{3}\right)$

$0<d<21$ $d^2=N(d)=N(\alpha)\cdot N\left(-5+\sqrt{3}\right)=N(\alpha)\cdot 22$ ולכן $22\,|\,d^2$ מאחר ש 22 נטול

ריבועים נובע ש $22\,|\,d$ בסתירה לכך ש $0<d<21$ לכן $\left|\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]/I\right|=22$.

ב. נשים לב ש $5^2=3(\bmod 11)$ לכן ב $\mathbb{Z}_{11}$ 3 הוא ריבוע של 5, לכן ב $\mathbb{Z}_{11}$ "$5=\sqrt{3}$".

$$\varphi\left(\left(a_1+b_1\sqrt{3}\right)\left(a_2+b_2\sqrt{3}\right)\right)=\varphi\left(a_1a_2+3b_1b_2+\left(a_1b_2+a_2b_1\right)\sqrt{3}\right)=\left(a_1a_2+3b_1b_2\right)+5\left(a_1b_2+a_2b_1\right)$$
$$\varphi\left(\left(a_1+b_1\sqrt{3}\right)\right)\varphi\left(\left(a_2+b_2\sqrt{3}\right)\right)=\left(a_1+5b_1\right)\left(a_2+5b_2\right)=a_1a_2+25b_1b_2+5\left(a_1b_2+a_2b_1\right)=$$
$$\left(a_1a_2+3b_1b_2\right)+5\left(a_1b_2+a_2b_1\right)$$

לכן φ אפימורפיזים.

ג. $\ker\varphi=\left\{a+b\sqrt{3}:a+5b\bmod 11=0\right\}=\left\{a+b\sqrt{3}:a=-5b\bmod 11\right\}$

מאחר ש $\ker\varphi$ אידיאל ובנוסף מתקיים $I=\langle -5+\sqrt{3}\rangle=(-5+\sqrt{3})\mathbb{Z}[\sqrt{3}]\subseteq\ker\varphi$ לפי משפט

האיזומורפיזים הראשון $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/\ker\varphi\cong\mathbb{Z}_{11}$. לכן

$$\ker\varphi\subset\langle -5+\sqrt{3}\rangle\rightarrow\left|\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/\ker\varphi\right|=11\neq\left|\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/I\right|.$$

ד. $\varphi(11)=11(\bmod 11)=0(\bmod 11)$ ולכן $11\in\ker\varphi$. אם $11\in\langle -5+\sqrt{3}\rangle$ אזי

$(-5+\sqrt{3})(a+b\sqrt{3})=-5a+3b+(a-5b)\sqrt{3}=11$ עבור איזשהו

$a+b\sqrt{3}\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}];a,b\in\mathbb{Z}$ לכן $a-5b=0\rightarrow -5a+3b=-22b=11$ בסתירה להנחה ש

$b\in\mathbb{Z}$.

ה. $11\in\ker\varphi$ לכן $\langle 11\rangle\subseteq\ker\varphi$ כמו כן ראינו ש $\langle -5+\sqrt{3}\rangle\subseteq\ker\varphi$ לכן

$\langle 11,-5+\sqrt{3}\rangle\subseteq\ker\varphi$. מצד שני

$$\ker\varphi=\{a+b\sqrt{3}:a=-5b\bmod 11,a,b\in\mathbb{Z}\}\subseteq\{a+b\sqrt{3}:a=-5b+11k:a,b,k\in\mathbb{Z}\}=$$
$$\{b(-5+\sqrt{3})+11k:k,b\in\mathbb{Z}\}=(-5+\sqrt{3})\mathbb{Z}+11\mathbb{Z}\subseteq(-5+\sqrt{3})\mathbb{Z}[\sqrt{3}]+11\mathbb{Z}[\sqrt{3}]=\langle 11,-5+\sqrt{3}\rangle$$

לכן $\ker\varphi=\langle 11,-5+\sqrt{3}\rangle$ והאיזומורפיזים נובע מסעיף ב.