# הערות לתרגול 14

בתרגול 14 שאלו אותי בסוף השיעור לגבי שאלה 14.4, איך להראות ש-$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n^2}{3^n}=0$, מבלי להשתמש בכלל לופיטל?

תשובה:

$n^2\le(1.2)^n$, ניתן להראות בעזרת אינדוקציה על $n$, שהאי שיוויון מתקיים החל מ- $n\ge 45$, ולכן

$$\frac{2^n n^2}{3^n}\le\frac{2^n}{3^n}\cdot(1.2)^n=\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

היות ו- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ (כיוון ש- $\frac{4}{5}<1$) נובע ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n^2}{3^n}=0$.

כמו כן לגבי שאלה 14.22, שאלו אותי בסוף השיעור מדוע $a_n^2\le a_n$ החל מ- $n$ מסוים?,

תשובה :

כיוון שנתון $\sum a_n$ מתכנס נובע שהחל מ -$n$ מסויים $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ולכן החל מ- $n$ מסויים $a_n\le 1$, כעת מכיוון ש- $\sum a_n$ טור חיובי נובע שלכל $n$, $a_n$ חיוביים, ולכן אם נכפיל את האי שיוויון $a_n\le 1$ ב- $a_n$ סימן האי שיוויון נשמר ונקבל $a_n^2\le a_n$ החל מ- $n$ מסויים, כעת נוכל להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי, מתקיים $a_n^2\le a_n$ החל מ- $n$ מסויים, כמו כן נתון ש-$a_n$ $\sum$ מתכנס, לכן ממבחן ההשוואה נובעת התכנסות של- $\sum a_n^2$.