

# פיתרון תרגיל 10

שאלה 1: בצורה  $[v]_B$  נמצא את  $\alpha, \beta, \gamma$  המקיימים

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{aligned} \gamma &= 2 \\ \beta &= -3 - 2 = -5 \\ \alpha &= 4 - 2 + 5 = 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 2: נחפש את  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  המקיימים

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

שאלה 2  
הרכיבים

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{פיתרון}} \begin{aligned} \alpha &= -7 \\ \beta &= 11 \\ \gamma &= -21 \\ \delta &= 30 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -21 \\ 30 \end{pmatrix}$$

שאלה 3: נחפש את  $\alpha, \beta, \gamma$

$$\alpha(1+t+t^2) + \beta(1+2t+3t^2) + \gamma(2-t+t^2) = 2-3t+4t^2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{פיתרון}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \end{array} \right) \quad \begin{aligned} \gamma &= \frac{12}{5} \\ \beta &= \frac{11}{5} \\ \alpha &= \dots \end{aligned}$$

$$[4t^2 - 3t + 2]_B = \begin{pmatrix} -5 \\ 11/5 \\ 12/15 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{כאן}$$

$$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Ⓚ} = 4 \text{ אסלע}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 13 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 7s - 6t \\ -4s + 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \right\} = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כאן

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right)$$

$w = t$   
 $z = s$   
 $y = 2t - 4s$   
 $x = -5s - 6t + 12s = 7s - 6t$

$\ker T = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  כאן  
 $\dim \ker T = 2$

$$I_m T = \text{sp} \left\{ \begin{array}{l} \text{לע } T \\ \text{כאן} \\ \text{כאן} \end{array} \right\} = \underline{\underline{I_m T}} \quad \text{Ⓚ}$$

$$= \text{sp} \left\{ T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

נכפול ב  
אחד מהם  
ב-A  
למצוא את T של  
ועברו תנאי

נורמל את התנאי: נסדר בעמודות

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

ולכן 2 העמודות המקוריות הראשונות הן (באחריות)

$$\text{Im } T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \text{בין}$$

$$\dim \text{Im } T = 2 \leftarrow$$

$$\underbrace{\dim \ker T}_2 + \underbrace{\dim \text{Im } T}_2 = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_4 \quad \text{קט} \quad \textcircled{c}$$

שאלה 5: כא

נניח כשליפה שהייתה קיימת אז

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \stackrel{L}{=} L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

כפי ש  
ל  
הוא

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \neq$$

אבל:

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$