פתרון תרגיל 11

שאלה 1

מכפלת מרחבים קומפקטים היא קומפקטית ולכן $X\times X$ קומפקטי. הוכחנו בתרגול כי הפונקציה $d: X\times X\to\mathbb{R}$ רציפה. לכן עפ"י הכללת משפט ויירשטראס מתקיים בפרט שמושג מקסימום. כלומר קיימים $a,b\in X$ כך ש

$d(a,b)=\sup\{d(x,y): x,y\in X\}=diam(X)$.

שאלה 2

נניח ש X האוסדורף ונראה שהאלכסון Δ סגור ב $X\times X$. נניח בשלילה שקיים $(a,b)\in\overline{\Delta}$ כך ש $(a,b)\notin\Delta$. עפ"י הגדרת האלכסון נקבל $a\neq b\in X$. מכיוון ש X האוסדורף קיימות U,V סביבות פתוחות וזרות של a,b בהתאמה. אבל אז נקבל ש $U\times V$ סביבה פתוחה של (a,b) ומתקיים $\left(U\times V\right)\cap\Delta=\varnothing$ (אחרת קיים $(x,x)\in U\times V$ ונקבל ש U,V אינן זרות) מכאן $(a,b)\notin\overline{\Delta}$ וזו כמובן סתירה להנחה.

הכיוון ההפוך: נניח בשלילה שהאלכסון Δ סגור ב $X\times X$ ו X אינו האוסדורף. אז קיימות $a\neq b\in X$ כך **שלכל** U,V סביבות פתוחות של a,b בהתאמה , $U\cap V\neq\varnothing$. אך אז נקבל שלכל סביבה בסיסית $U\times V$ של (a,b) (הכוונה לקבוצה בבסיס של טופולוגית המכפלה) מתקיים $\left(U\times V\right)\cap\Delta\neq\varnothing$ (מדוע?) וזה מראה כי $(a,b)\in\overline{\Delta}$ (בהגדרה של סגור מספיק לבדוק סביבות בסיסיות) למרות ש $(a,b)\notin\Delta$ וזו סתירה לכך שהאלכסון Δ סגור.

שאלה 3

נניח שלכל $i\in I$ X_i דיסקרטי. נוכיח ש $X=\prod_{i\in I}X_i$ דיסקרטי אם ורק אם קיימת $F\subseteq I$ סופית כך ש $|X_i|=1$ לכל $i\notin F$.

הוכחה:

נניח תחילה שקיימת $F\subseteq I$ סופית כך ש $|X_i|=1$ לכל $i\notin F$. נראה ש $X=\prod_{i\in I}X_i$ דיסקרטי. מ"ל שכל נקודון ב X פתוח. נקודון ב X הוא מהצורה $\prod_{i\in I}\{x_i\}$ באשר לכל $i\in I$ $x_i\in X_i$. כעת, לכל $i\in I$ מתקיים $\{x_i\}$ קבוצה פתוחה ב X_i (שכן X_i דיסקרטי). כמו כן

$F \subseteq I$ סופית כך שלכל $i \notin F$ מתקיים $\{x_i\} = X_i$ (למה?). מכאן $\prod_{i\in I}\{x_i\}$ פתוחה (למעשה פתוחה בסיסית) ב X, עפ"י הגדרת טופולוגית המכפלה.

בכיוון ההפוך: נניח ש $X = \prod_{i\in I} X_i$ דיסקרטי. לכל $i \in I$ נבחר $x_i \in X_i$. אזי, $\prod_{i\in I}\{x_i\}$ פתוחה ב $X = \prod_{i\in I} X_i$ (כי הוא דיסקרטי). $\prod_{i\in I}\{x_i\}$ פתוחה ב $X = \prod_{i\in I} X_i$ ובפרט היא איחוד של פתוחות בסיסיות, לפי טופולוגית המכפלה. לכן קיימת פתוחה בסיסית המוכלת בה.

<u>שאלה 4</u>

א. עלינו להוכיח שני תנאים:

1. f על – נובע מכך שפונקצית הזהות היא על.
2. $U \subseteq Y$ פתוחה $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U) \subseteq X$ פתוחה. כיוון $\Leftarrow$ ברור מרציפותה של f. נוכיח את הכיוון השני. תהי $f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X. בשל רציפות g, $g^{-1}\left(f^{-1}(U)\right)$ פתוחה ב- Y.

מאידך $(f \circ g)^{-1}(U) = Id^{-1}(U) = U$. והוכחנו הדרוש!

ב. $\Leftarrow$ מיידי מהגדרת הומיאומורפיזם.

$\Rightarrow$ מספיק להוכיח כי ההעתקה פתוחה (רציפות ועל נובעות מכך ש f היא העתקת מנה, חח"ע נתונה). תהי $V \subseteq X$ פתוחה. $V = f^{-1}\left(f(V)\right)$ (כי f חח"ע), מכיוון ש $f^{-1}\left(f(V)\right)$ פתוחה ב - X נקבל ע"פ הגדרת העתקת מנה ש- $f(V)$ פתוחה ב- Y.

<u>שאלה 5</u>

א. נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x,y) = x + y^2$. מתקיים

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \Leftrightarrow f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$$

לכן $\hat{f} : \mathbb{R}^2/\sim \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\hat{f}\left[(x,y)\right] = f(x,y)$ מוגדרת היטב וחח"ע; ומכיוון ש f רציפה כך גם $\hat{f}$.

נראה ש $\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה:

תהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/\sim$ מוגדרת ע"י $g(x) = \left[(x,0)\right]$ אזי $g = \rho \circ h$ באשר

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ h(x)=(x,0)$ ולכן g רציפה כהרכבת רציפות (h רציפה שכן היא רציפה רכיב רכיב. ברכיב הראשון מדובר בפונקצית הזהות מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ובשני בפונקציה קבועה). נותר להוכיח כי $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$. $g\circ\hat{f}\left[(x,y)\right]=g(x+y^2)=\left[\left(x+y^2,0\right)\right]=\left[(x,y)\right]$ לכן ההרכבה של $g\circ\hat{f}$ היא הזהות ($id_{\mathbb{R}^2/\sim}$). ניתן להראות שההרכבה בכיוון השני נותנת גם את הזהות ($id_{\mathbb{R}}$)

ומכאן $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה וקיבלנו בסה"כ ש $\mathbb{R}^2/\sim$ הומיאומורפי ל $\mathbb{R}$.

ב. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ ע"י $f(x,y)=x^2+y^2$. (שימו לב f על $[0,\infty)$) בדיוק כמו בסעיף א מסיקים ש $\hat{f}$ מוגדרת היטב חח"ע ורציפה וגם כאן אם נגדיר $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}^2/\sim$ ע"י $g(x)=\left[\left(\sqrt{x},0\right)\right]$ בדומה לסעיף א' ניתן לבדוק ולראות ש $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$ (בדקו הרכבה בשני הכיוונים ותקבלו פונקציות זהות). כעת מספיק להוכיח ש g רציפה ואמנם $g=\rho\circ t\circ r$ באשר $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ r(x)=\sqrt{x}$, $t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, t(x)=(x,0)$ ולכן g רציפה כהרכבת רציפות וקיבלנו בסה"כ ש $\mathbb{R}^2/\sim, [0,\infty)$ הומיאומורפיים.

<u>בונוס</u>

תהי $f:X\to Y$ העתקה סגורה, כך ש $f^{-1}\left(\{y\}\right)$ קומפקטית לכל $y\in Y$. תהי $K\subseteq Y$ קומפקטית. נראה ש $f^{-1}(K)$ קומפקטית. יהי $\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ כיסוי פתוח של $f^{-1}(K)$ ב X . אזי לכל $k\in K$ $\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ כיסוי פתוח ב X של $f^{-1}\left(\{k\}\right)$. מהנחת הקומפקטיות נקבל ש לכל $k\in K$ קיימת קבוצה סופית $\gamma_k\subseteq\Lambda$ כך ש $f^{-1}\left(\{k\}\right)\subseteq\bigcup_{\lambda\in\gamma_k}U_\lambda$. הקבוצה $X\setminus\bigcup_{\lambda\in\gamma_k}U_\lambda$ סגורה ב ב X . מכיון ש f העתקה סגורה נקבל ש $f\left(X\setminus\bigcup_{\lambda\in\gamma_k}U_\lambda\right)$ סגורה ב Y. מכאן לכל $k\in K$ הקבוצה $V_k=Y\setminus\left(f\left(X\setminus\bigcup_{\lambda\in\gamma_k}U_\lambda\right)\right)$ פתוחה ב Y . קל לראות ש $k\in V_k$. כעת, $K\subseteq\bigcup_{k\in K}V_k$

ומכיון ש K קומפקטי עפ"י ההנחה נקבל שקיים מספר סופי של איברים

$k_1,k_2,\dots,k_s \in K$ כך ש $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} V_{k_i}$. יתרה מכך הקבוצה $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{s} \gamma_{k_i}$ סופית כאיחוד סופי

של קבוצות סופיות. מתקיים: $f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{s} V_{k_i}\right) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Gamma} U_\lambda$. מצאנו תת כיסוי סופי

וזה מוכיח את הקומפקטיות של $f^{-1}(K)$.