תרגול 10-אושרית

מטריצות מעבר בין בסיסים, מטריצות מייצגות העתקה

תרגיל מתרגול שעבר:

תזכורת: איזומורפיזם= העתקה חח"ע ועל

הוכיחו Tאיזומורפיזם

יהא: $T:\mathbb{F}^{m\times n}\to\mathbb{F}^{n\times m}$ המוגדרת ע"י: $T(A)=A^t$

הוכחה: 1) נחשב את $\ker(T)$

$T(A)=0 \Leftrightarrow A^t=0 \xleftrightarrow{\text{נפעיל } t \text{ על 2 האגפים}} (A^t)^t=0^t \Leftrightarrow \boxed{A=0}$

⇐ $\ker T=\{A\in\mathbb{F}^{m\times n} \mid T(A)=0\}=\{0\}$

⇐ T חח"ע.

2) $\underbrace{\dim\ker T}_{0}+\dim \operatorname{Im}T=m\cdot n$ לפי משפט המימד

⇐ $\dim \operatorname{Im}T=\dim\mathbb{F}^{n\times m}$

וגם ברור כי $\operatorname{Im}T\subseteq\mathbb{F}^{n\times m}$

⇐ $\operatorname{Im}T=\mathbb{F}^{n\times m}$

⇐ T על

⇐ T חח"ע ועל ⇐ $\boxed{T\ \text{איזו'}}$

מטריצת מעבר בין בסיסים:

מטרה - שאלנו איך למצוא קורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי, נשתמש בזה בהמשך. משתמשים לפעמים כדי לחשב קורדינטות לפי בסיס שהוא לאו-דווקא סטנדרטי.

משפט: יהא V מ"ו ויהיו E,F בסיסים שלו. אזי קיימת מטריצה יחידה המסומנת $[I]_F^E$ המקיימת את הכפל הבא:

$$\forall v\in V : [I]_F^E\cdot[v]_E=[v]_F$$

סימון - $E=\{v_1,\dots,v_n\}$ $F=\{w_1,\dots,w_n\}$ אזי מתקיים ש- $[I]_F^E$ מטריצה שעמודותיה הן- $[v_i]_F$

דוגמה: $V=\mathbb{R}^2$ יהיו 2 בסיסים ל-V

$F=\left\{w_1=\binom{1}{0},w_2=\binom{1}{1}\right\}$ $E=\left\{v_1=\binom{3}{-2},\ v_2=\binom{0}{1}\right\}$

נמצא את $[I]^E_F$

$$[I]^E_F=\begin{pmatrix} | & | \\ [v_1]_F & [v_2]_F \\ | & | \end{pmatrix}$$

נחשב כל 1 מהעמודות הנ"ל.

$$\alpha_1\binom{1}{0}+\cancel{\binom{\alpha_1}{2}}\alpha_2\binom{1}{1}=\binom{3}{-2} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Leftarrow$$

$$[v_1]_F=\binom{\alpha_1}{\alpha_2}=\binom{5}{-2}$$

$$\alpha_1\binom{1}{0}+\alpha_2\binom{1}{1}=\binom{0}{1} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$[v_2]_F=\binom{\alpha_1}{\alpha_2}=\binom{-1}{1} \Rightarrow \boxed{[I]^E_F=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

משפט: לכל 2 בסיסים E,F מטריצת המעבר היא מטריצה הפיכה ומתקיים $\left([I]^E_F\right)^{-1}=[I]^F_E$

מסקנה ⇐ אלגוריתם למטריצת מעבר בין כל 2 בסיסים E ו-F.

1) נבחר בסיס סטנדרטי S המתאים למרחב שלך.

2) נמצא את מטריצת המעבר $[I]_S^E$. זה קל מאוד שכן יש למצוא את הקורדינטות של E לפי S.

פשוט לשים בעמודות לפי הסדר

3) נמצא את מטריצת המעבר $[I]_S^F$

4) נהפוך את המטריצה האחרונה לקבל- $([I]_S^F)^{-1} = [I]_F^S$

5) נכפול את המטריצות כדי לקבל-תוצאה סופית $[I]_F^S \cdot [I]_S^E = [I]_F^E$

מסקנה ⇐ אלגוריתם למטריצת מעבר בין כל 2 בסיסים E ו-F.

1) מצא בסיס סטנדרטי S המתאים למרחב שלך.

2) מצא-את מטריצת המעבר $[I]_S^E$. זה קל מאוד שכן-יש לרשום את הקורדינטות של E לפי S.

3) מצא-את מטריצת המעבר $[I]_S^F$

4) הפוך-את המטריצה האחרונה לקבל- $\left([I]_S^F\right)^{-1} = [I]_F^S$

5) כפול את המטריצות כדי לקבל-המבוקשת סופית $[I]_F^S \cdot [I]_S^E = [I]_F^E$

דוג: $V=\mathbb{R}_2[x]$ מצא- $[I]_F^E$ כאשר- $F=\{x,\ 1+x,\ 1+2x^2\}$ $E=\{1+x,\ x+x^2,\ x^2\}$

פתרון:

שלב 1: נמצא בסיס סטנדרטי ל- V: $S=\{1,x,x^2\}$

שלב 2:

$$[I]_S^E = \begin{pmatrix} [1+x]_S & [x+x^2]_S & [x^2]_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

שלב 3:

$$[I]_S^F = \begin{pmatrix} [x]_S & [1+x]_S & [1+2x^2]_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[I]^{G}_{F} = \left([I]^{F}_{G}\right)^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 = \frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_3}$$

:4 pde

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}}_{[I]^{F}_{G}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

:5 pde

$$[I]^{\epsilon}_{F} = [I]^{G}_{F} \cdot [I]^{\epsilon}_{G} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1.5 & 0.5 \\ 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}}$$

תרגיל: נתונה - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ובסיס - $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

מצאו - בסיס F כך ש- $A = [I]_F^E$

פתרון!! נסמן - $F = \{v_1, v_2, v_3\}$

נקבל -

$$[I]_E^F = A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$[I]_E^F = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [v_1]_E & [v_2]_E & [v_3]_E \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$v_1 = -\frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow F = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

כעת נבצע הכללה...

מטריצות מייצגות:

הג׳: תהי $T:V\to W$ ה״ל, ויהיו E, F בסיסים ל-W, V בהתאמה.

נסמן - $E=\{v_1,\dots,v_n\}$ אזי המטריצה המייצגת את T מבסיס E לבסיס F הינה מטריצה שעמודותיה הן קורדינטות לפי בסיס F של התמונות של איברי הבסיס E. מסומנים-

$$[T]_F^E=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [Tv_1]_F & [Tv_2]_F & \cdots & [Tv_n]_F \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

הערה: $[T]_F^E$ המטריצה היחידה שמקיימת לכל $v\in V$ מתקיים- $[T]_F^E[v]_E=[Tv]_F$

מטריצת מעבר מקרה פרטי של מטריצה מייצגת כאשר $T=I$.

נתון: $V=\mathbb{R}_2[x],\ W=\mathbb{R}^2$ ויהיו $F=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $E=\{1,x,x^2\}$ בסיסים בהתאמה.

נגדיר - $T:V\to W$ ע"י $T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}b+c\\a\end{pmatrix}$

צ"ל: $[T]_F^E=?$

פתרון:

$$\left.\begin{aligned}[T(1)]_F&=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ [T(x)]_F&=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ [T(x^2)]_F&=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow [T]_F^E=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

משפט: יהיו V_1, V_2, V_3 מ"ו עם בסיסים B_1, B_2, B_3 בהתאמה. יהיו $S: V_2 \to V_3$, $T: V_1 \to V_2$

שתי העתק. לינאריות אז מתקיים:

$$[S \circ T]_{B_3}^{B_1} = [S]_{B_3}^{B_2} \circ [T]_{B_2}^{B_1}$$

הוכחה: אז יהי $v \in V_1$ מתקיים:

$$[S]_{B_3}^{B_2} \cdot [T]_{B_2}^{B_1} [v]_{B_1} = [S \circ T(v)]_{B_3}$$

לפי הג' מטריצה מייצגת נקבל -

$$[S]_{B_3}^{B_2} \cdot [T]_{B_2}^{B_1} [v]_{B_1} = [S]_{B_3}^{B_2} \cdot [T_v]_{B_2} = [S \circ T(v)]_{B_3}$$

שיטה נוספת למציאת מטריצה מייצגת העתקה

תר: יהיו $V=\mathbb{R}_2[x]$, $W=\mathbb{R}^2$

$E=\{-1,\,2+x,\,3+x+x^2\}$ בסיס ל-V

$F=\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$ בסיס ל-W

ונגדיר- $T:V\to W$ הל' ההעתקה הבאה:

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}b+c\\a\end{pmatrix}$$

מצ- $[T]_F^E$

פתרון (עדיף לפי השלבים הבאים):

שלב 1: למצוא את מטריצת המעבר $[I]_S^F$

$$[I]_S^F=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

שלב 2: להפוך ל $[I]_S^F$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1=R_1-R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}}_{[I]_F^S}$$

שלב 3: להפעיל את ההעתקה T על איברי הבסיס E.

$$T(-1)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\qquad T(2+x)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\qquad T(3+x+x^2)=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

שלב 4: לשים את הוקטורים משלב 3 בעמודות המטריצה

$$[T]_S^E=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&2&3\end{pmatrix}$$

שלב 5:

$$[T]_F^E=[I]_F^S\cdot[T]_S^E=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&3\end{pmatrix}$$

תרגיל טכני וארוך...

תרגיל: יהיו $V=\text{span}\{v_1=(1,0,-1,1),\ v_2=(-2,1,2,0),\ v_3=(0,-1,0,1)\}$

$W=\mathbb{R}_3[x]$

$T: V \to W$

$\forall i:\ Tv_i = w_i$ כאשר - $w_1 = 1+x$, $w_2 = x^3+x^2+x+1$, $w_3 = 0$

מצאו את ההעתקה במפורש

פתרון:

נמצא את המטריצה המייצגת $[T]_{E}^{B}$ כאשר $B=\{v_1,v_2,v_3\}$

$$[T]_{E}^{B}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ [Tv_1]_E & [Tv_2]_E & [Tv_3]_E \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ [w_1]_E & [w_2]_E & [w_3]_E \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

שימו ♡ - הכלל של V הוא-לא מרחב שאנחנו מכירים אז- אין לנו בסיס סטנדרטי הפשוט לכן-
ניקח את הבסיס הקיים שלנו- ~~[illegible]~~ ונדרג למצוא בסיס נוח יותר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_V=\{\overset{e_1}{(-1,0,1,0)},\overset{e_2}{(0,1,0,0)},\overset{e_3}{(0,0,0,1)}\}=$$

כעת נמצא - מטריצה מורחבת

$$[I]^{B}_{S_V} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ופתרון - מערך מקדמי נמצא. $v_1 = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\dots]{\text{אלמנטריות}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$[T]^{S_V}_{S} = [T]^{B}_{S}[I]^{S_V}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן - וקטור כללי במרחב V

$$x\cdot(-1,0,1,0) + y(0,1,0,0) + z(0,0,0,1) = (-x,y,x,z)$$

$$[T(-x,y,x,z)]_S = [T]^{S_V}_{S}\cdot[(-x,y,x,z)]_{S_V} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y+z \\ \frac{1}{3}(x+y+z) \\ \frac{1}{3}(x+y+z) \end{pmatrix}$$

$$T(-a,b,a,d) = b+d+(b+d)x+\frac{1}{3}(a+b+d)x^2+\frac{1}{3}(a+b+d)x^3$$

סימון מתמטי: יהא V מ"ו ממימד סופי n מעל F ו- $T: V\to V$ ה"ל. ונשתמש בסימון $\approx$ עבור הדמיון של מטריצות.

הגדרת הדמיון $\approx$: $A\approx B$ אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $A=P^{-1}BP$ (נקרא הדמיון).

מתקיים כי - 1) $[T]_B\approx[T]_{B'}$ לכל 2 בסיסים B, B'.

2) אם $[T]_B\approx A$ עבור B בסיס כלשהו אזי קיים בסיס B' כך ש- $[T]_{B'}=A$

כלומר - המטריצה המייצגת של T יחידה עד כדי דמיון.

כלומר - אם נייצג את T ע"י 2 בסיסים נקבל מטריצות דומות ולהיפך - אם נשתמש במטריצה A הדומה לאיזו מטריצה מייצגת כלשהי T אז גם A מייצגת את T.

הוכחה:

1) מתקיים - בגלל השוויון $[T]_B^B=[I]_B^{B'}[T]_{B'}^{B'}[I]_{B'}^B$ אושר - בגלל מוכפלת מטריצה הפיכה.

2) נתון - כי קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}[T]_BP=A$ ~~[illegible]~~ לפי טענה שבקה ללא הוכחה (כי מטריצה מזוהה לאפשר להגדיר בסיס) קיים בסיס B' כך ש- $[I]_B^{B'}=P$

ולכן - $A=P^{-1}[T]_BP=[I]_{B'}^B[T]_B[I]_B^{B'}$

$\| \quad [T]_B^{B'}$

כלומר A אכן מייצגת את T לפי בסיס B'.

הגדרה: יהי V מ"ו ממימד סופי n, ותהי $T:V\to V$ הע"ל

אזי העקבה של T מוגדרת להיות $trace(T) = trace([T]_B)$ כאשר B בסיס כלשהו

תרגיל: נראה שהעקבה של הע"ל מוגדרת היטב.

הוכחה: יהיו B ו-B' 2 בסיסים של V

לפי המסקנה לעיל - מתקיים כי קיימת P הפיכה כך ש-

$$[T]_B = P^{-1}[T]_{B'}P$$

נפעיל trace על 2 האגפים ונקבל-

$$tr([T]_B) = tr(P^{-1}[T]_{B'}P) = tr(\underbrace{PP^{-1}}_{I}[T]_{B'}) = tr([T]_{B'})$$

$tr(AB)=tr(BA)$

מש"ל

מוגדרת היטב=לא משנה איזה בסיס ניקח העקבה תישאר אותו דבר

תרגיל ממבחן:

יהי V מ"ו נוצר סופית ממימד n, B בסיס סדור ל-V ותהי A מטריצה ריבועית הפיכה

מגודל n×n מעל אותו שדה.

הוכיחו/הפריכו: קיים בסיס סדור C ל-V כך ש- $[I]_C^B = A$

פתרון: נכון: $A = [I]_C^B$ אמ"מ $[I]_B^C = A^{-1}$

לכן- נגדיר v_i כך ש- $[v_i]_B = C_i(A^{-1})$ כלומר- v_i צירוף לינארי של איברי הבסיס B

עם המקדמים בעמודה i של A^{-1}.

כיוון ש-A^{-1} הפיכה עמודותיה בת"ל. $\Leftarrow [v_1]_B,\dots,[v_n]_B$ בת"ל $\Leftarrow v_1,\dots,v_n$ בת"ל

הוכחנו ב-1 בתרגול.

לפי השניים השלישי חינם (בת"ל + גודל מתאים)

$C=\{v_1,\dots,v_n\}$ הוא בסיס סדור ל-V

~~ובפרט~~ ולכן- $A = [I]_C^B$ מש"ל

בהצלחה!!!