83-116 מתמטיקה בדידה – תרגיל 5

לציין בפתרון המוגש: שם מלא, ת.ז ויום של התרגול אליו אתם באים

תרגיל 1

נתבונן ביחס $R_{\leq}$ המוגדר על $\mathbb{Z}$: $(a,b) \in R_{\leq}$ אם $a \leq b$

בדוק אם היחס: רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי.

היחס "קטן או שווה" על $\mathbb{Z}$, $\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | a \leq b\}$:

- רפלקסיבי - לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים $a \leq a$.
- לא אנטי-רפלקסיבי - לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים $a \leq a$.
- לא סימטרי – עבור $2,3 \in \mathbb{Z}$ מתקיים $2 < 3$ אולם לא מתקיים $3 < 2$.
- אנטי-סימטרי - לכל $a,b \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(a \leq b \wedge b \leq a) \rightarrow a = b$.
- טרנזיטיבי - לכל $a,b,c \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(a \leq b \wedge b \leq c) \rightarrow a \leq c$.

תרגיל 2

נתבונן ביחס $R_{<}$ המוגדר על $\mathbb{Z}$: $(a,b) \in R_{<}$ אם $a < b$

בדוק אם היחס: רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי.

היחס "קטן מ" על $\mathbb{Z}$, $\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | a < b\}$:

- לא רפלקסיבי - לא קיים $a \in \mathbb{Z}$ שעבורו $a < a$.
- אנטי-רפלקסיבי - לא קיים $a \in \mathbb{Z}$ שעבורו $a < a$.
- לא סימטרי - לכל $a,b \in \mathbb{Z}$ אם $a < b$ אזי לא מתקיים $b < a$.
- אנטי-סימטרי - לכל $a,b \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(a < b \wedge b < a) \rightarrow a = b$.
  שימו לב שתנאי זה מתקיים באופן ריק כי לא קיימים $a,b \in \mathbb{Z}$ עבורם $a < b \wedge b < a$.
- טרנזיטיבי - לכל $a,b,c \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(a < b \wedge b < c) \rightarrow a < c$.

תרגיל 3

א. כמה יחסים ניתן להגדיר על קב' בת n איברים?

אם A קבוצה בת n איברים. מס' היחסים הם תתי הקבוצות של $A \times A$

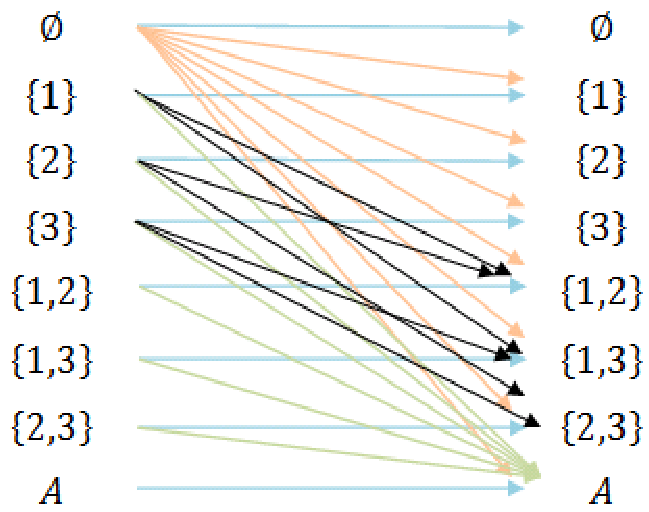
וכאלו יש $2^{|A\times A|} = 2^{n^2}$

ב. תהי A קבוצה. מגדירים יחס הכלה על $P(A)$:

$(X,Y) \in R$ אם $X \subseteq Y$

עבור $A = \{1,2,3\}$ רשום את אברי יחס ההכלה והצג בעזרת גרף.

$$R = \left\{ \begin{array}{c} (\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{1\}),(\emptyset,\{2\}),(\emptyset,\{3\}),(\emptyset,\{1,2\}),(\emptyset,\{1,3\}),(\emptyset,\{2,3\}),(\emptyset,A), \\ (\{1\},\{1\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{1\},\{1,3\}),(\{1\},A), \\ (\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\}),(\{2\},\{2,3\}),(\{2\},A), \\ (\{3\},\{3\}),(\{3\},\{1,3\}),(\{3\},\{2,3\}),(\{3\},A), \\ (\{1,2\},\{1,2\}),(\{1,2\},A),(\{1,3\},\{1,3\}),(\{1,3\},A),(\{2,3\},\{2,3\}),(\{2,3\},A),(A,A) \end{array} \right\}$$



ג. עבור $\mathrm{A} = \mathbb{N}$ בדוק אם יחס ההכלה על $P(A)$ הוא: רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי.

יחס ההכלה על $P(\mathbb{N})$:

- רפלקסיבי - כי לכל $A \subseteq \mathbb{N}$ מתקיים: $A \subseteq A$
- לא אנטי רפלקסיבי - כי לכל $A \subseteq \mathbb{N}$ מתקיים: $A \subseteq A$
- לא סימטרי - כי למשל $\mathbb{N} \subseteq \emptyset$ אבל $\emptyset \nsubseteq \mathbb{N}$
- אנטי סימטרי - כי לכל 2 קבוצות $A \subseteq B \land B \subseteq A \Longleftarrow A = B$
- טרנזיטיבי - כי $A \subseteq B \land B \subseteq C \Longleftarrow A \subseteq C$

תרגיל 4

יהיו R_1, R_2 יחסים על A. הוכח או הפרך:

א. אם R_1, R_2 רפלקסיביים אז $R_1 \cup R_2$ רפלקסיבי

נכון. יהי $a \in A$. מכיוון ש R_1 רפלקסיבי נובע ש $(a,a) \in R_1$. ולכן $(a,a) \in R_1 \cup R_2$.

ב. אם R_1, R_2 אנטי רפלקסיביים אז $R_1 \cup R_2$ אנטי רפלקסיבי

ב) נכון. שימו לב ש

$$(a,a) \notin R_1 \cup R_2 \Leftrightarrow \neg\big((a,a) \in R_1 \cup R_2\big) \Leftrightarrow \neg\big((a,a) \in R_1 \lor (a,a) \in R_2\big) \Leftrightarrow (a,a) \notin R_1 \land (a,a) \notin R_2$$

יהי $a \in A$. מכיוון ש R_1 אנטי-רפלקסיבי נובע ש $(a,a) \notin R_1$.
מכיוון ש R_2 אנטי-רפלקסיבי נובע ש $(a,a) \notin R_2$.
לכן $(a,a) \notin R_1 \land (a,a) \notin R_2$, כלומר $(a,a) \notin R_1 \cup R_2$.

ג. אם R_1, R_2 סימטריים אז $R_1 \cup R_2$ סימטרי

נכון. יהיו $a, b \in A$ כך ש $(a,b) \in R_1 \cup R_2$, כלומר $(a,b) \in R_1 \lor (a,b) \in R_2$.
מקרה 1: אם $(a,b) \in R_1$ אזי מכיוון ש R_1 סימטרי נובע ש $(b,a) \in R_1$, ולכן $(b,a) \in R_1 \cup R_2$.
מקרה 2: אם $(a,b) \in R_2$ אזי מכיוון ש R_2 סימטרי נובע ש $(b,a) \in R_2$, ולכן $(b,a) \in R_1 \cup R_2$.

ד. אם R_1, R_2 טרנזטיביים אז $R_1 \cup R_2$ טרנזיטיבי

לא נכון. יהיו $A = \{1,2,3\}, R_1 = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}, R_2 = \{(3,1),(1,2),(3,2)\}$.
אזי R_1, R_2 טרנזיטיביים אך $R_1 \cup R_2$ לא טרנזיטיבי כי $(1,3),(3,1) \in R_1 \cup R_2$ אולם $(1,1) \notin R_1 \cup R_2$.

תרגיל 5

האם הדוגמאות הבאות הן פונקציות?

א. $f = \{(1,5), (2,4), (3,5)\}$

כן

ב. $g = \{(1,5), (2,4), (1,6)\}$

לא! $3 \in A$ לא מופיע כאיבר ראשון באף זוג. (הפונקציה לא מוגדרת עבור 3)

ג. $h = \{(1,2), (1,3), (2,5), (3,6)\}$

לא! כי $1 \in A$ מופיע פעמיים כאיבר ראשון. (יש לו 2 "תמונות")