הרצאה 1

שדות

הגדרה

שדה הוא קבוצה $\mathbb{F}$ עם פעולות $+,\cdot$ על $\mathbb{F}$, כך שמתקיימות התכונות הבאות:

1. מוגדרות: לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מותאם איבר יחיד $a+b\in\mathbb{F}$ ואיבר יחיד $a\cdot b\in\mathbb{F}$.
2. חילוף: לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיים: $a+b=b+a$, $a\cdot b=b\cdot a$.
3. קיבוץ: לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים: $a+(b+c)=(a+b)+c$ וכן $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.
4. איברים ניטרליים לחיבור ולכפל. קיימים איברים $0,1\in\mathbb{F}$ כך ש $1\neq 0$ ולכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $a+0=a$, וכן $a\cdot 1=a$.
5. איברים הופכיים: לכל $a\in\mathbb{F}$ קיים איבר נגדי $-a\in\mathbb{F}$ כך ש: $a+(-a)=0$, ולכל $0\neq a\in\mathbb{F}$ קיים איבר הופכי $a^{-1}\in\mathbb{F}$ כך ש $a\cdot a^{-1}=1$.
6. פילוג: לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

דוגמאות

1. קבוצת המספרים הממשיים עם פעולות והחיבור המוכרים.
2. קבוצת המספרים המרוכבים:
   נגדיר פעולות על הקבוצה $\mathbb{C}:=\mathbb{R}\times\mathbb{R}:=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R}\}$.
   בצורה הבאה: $0_C:=(0,0)$, $1_C:=(1,0)$, ולכל $(a,b),(c,d)\in C$ נגדיר
   $(a,b)+_{\mathbb{C}}(c,d)=(a+_{\mathbb{R}}c,b+_{\mathbb{R}}d)$.
   $(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}(c,d)=(a\cdot_{\mathbb{R}}c+_{\mathbb{R}}(-b\cdot_{\mathbb{R}}d),a\cdot_{\mathbb{R}}d+_{\mathbb{R}}b\cdot_{\mathbb{R}}c)$.
3. נתבונן בקבוצה $\mathbb{F}:=\{a,b,c\}$ ונגדיר עליה פעולות כפל וחיבור

$+$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\bullet$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

שימו לב: האיבר הניטרלי לחיבור הוא a והאיבר הניטרלי לכפל הוא b.

תכונות השדה

יהא $\{\mathbb{F},+,\bullet,0,1\}$ שדה.

תכונת הצמצום

א. לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים: אם $a+c=b+c$, אזי $a=b$.

ב. לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים: אם $a\cdot c=b\cdot c$, וכן $c\neq 0$, אזי $a=b$.

הוכחה

א.

יהיו $a,b,c\in\mathbb{F}$ כך ש $a+c=b+c$.

מכיוון ש $\mathbb{F}$ שדה קיים איבר ניטרלי $0\in\mathbb{F}$ כך ש $a=a+0$.

מכיוון ש $\mathbb{F}$ שדה קיים ל c איבר נגדי $-c$ כך ש $c+(-c)=0$ ולכן $a+0=a+(c+(-c))$.

מהקיבוץ בשדה נקבל $a+(c+(-c))=(a+c)+(-c)$.

מהנתון ש $a+c=b+c$ נקבל $(a+c)+(-c)=(b+c)+(-c)$.

מהקיבוץ בשדה נקבל ש $(b+c)+(-c)=b+(c+(-c))$.

ראינו ש $c+(-c)=0$ ולכן $b+(c+(-c))=b+0$.

מכיוון ש 0 איבר ניטרלי לחיבור נקבל ש $b+0=b$.

ב.

יהיו $a,b,c\in\mathbb{F}$ כך ש $a\cdot c=b\cdot c$ כך ש $c\neq 0$.

מכיוון ש $\mathbb{F}$ שדה קיים איבר ניטרלי לכפל $1\in\mathbb{F}$ כך ש $a=a\cdot 1$.

מכיוון ש $\mathbb{F}$ שדה וכן $c\neq 0$ ולכן קיים ל c איבר הופכי c^{-1} כך ש $c\cdot c^{-1}=1$ ולכן $a\cdot 1=a\cdot\left(c\cdot c^{-1}\right)$.

מהקיבוץ בשדה נקבל $a\cdot\left(c\cdot c^{-1}\right)=(a\cdot c)\cdot c^{-1}$.

מהנתון ש $a\cdot c=b\cdot c$ נקבל $(a\cdot c)\cdot c^{-1}=(b\cdot c)\cdot c^{-1}$.

מהקיבוץ בשדה נקבל ש $(b\cdot c)\cdot c^{-1}=b\cdot\left(c\cdot c^{-1}\right)$.

ראינו ש $c\cdot c^{-1}=1$ ולכן $b\cdot\left(c\cdot c^{-1}\right)=b\cdot 1$.

מכיוון ש 1 איבר ניטרלי לכפל נקבל ש $b\cdot 1=b$.

<u>תכונה 2</u>

לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $0\cdot a=a\cdot 0=0$.

<u>הוכחה</u>

יהי $a\in\mathbb{F}$. מכיוון ש 0 ניטרלי לחיבור נקבל ש $a\cdot 0=0+a\cdot 0=0,0+0=0$.

מכלל הפילוג נקבל ש $a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$ סה"כ קיבלנו ש $a\cdot 0=a\cdot 0+a\cdot 0$.

$0+a\cdot 0=a\cdot 0+a\cdot 0$ מתכונת הצמצום נקבל ש $0=a\cdot 0$.

<u>תרגיל</u>

נתבונן בקבוצה $\mathbb{F}=\{0,1,2,3\}$ ונגדיר עליה פעולות כפל וחיבור.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

•	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

הוכח שהקבוצה עם הפעולות הנ"ל אינה שדה.

<u>פתרון</u>

נשים לב שהאיבר הניטרלי לכפל הוא 1.

לאיבר 2 אין איבר הופכי ולכן הקבוצה הנ"ל אינה שדה.

<u>הערה</u>

נשים לב ש $2\cdot 2=0$ למרות ששני האיברים שונים מאפס.

<u>הגדרה</u>

איבר $0\neq a\in\mathbb{F}$ נקרא מחלק אפס אם יש $0\neq b\in\mathbb{F}$ כך ש $a\cdot b=0$.

<u>תכונה 3</u>

בשדה אין מחלקי אפס.

<u>הוכחה</u>

נניח בשלילה שיש בשדה מחלקי אפס ז"א קיימים שני איברים $0\neq a,b\in\mathbb{F}$ כך ש $a\cdot b=0$.

מכיוון ש $b\neq 0$ קיים ל b איבר הופכי b^{-1} ואז $(a\cdot b)\cdot b^{-1}=a\cdot\left(b\cdot b^{-1}\right)=a\cdot 1=a$.

מצד שני $(a\cdot b)\cdot b^{-1}=0\cdot b^{-1}=0$ (השוויון השני נובע מתכונה 2).

סה"כ קיבלנו ש $a=0$ בסתירה לנתון ש $a\neq 0$.

<u>תכונה 4</u>

אם $0\neq a\in\mathbb{F}$, אז $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$.

<u>הוכחה</u>

נסמן $b=a^{-1}$ צריך להוכיח ש $b^{-1}=a$.

$a\cdot b=a\cdot a^{-1}=1$ ולכן $b^{-1}=a$.

<u>השדה Z_p</u>

יהא p מספר ראשוני. נסמן $\mathbb{Z}_P=\{0,1,...,p-1\}$.

עבור מספר טבעי n, נכתוב "$n \bmod p$" עבור השארית המתקבלת כאשר מחלקים את n ב p.

נגדיר חיבור וכפל על $\mathbb{Z}_P$ בצורה הבאה:

חיבור: $a\oplus b=(a+b)\bmod p$.

כפל: $a\otimes b=(a\cdot b)\bmod p$.

<u>משפט</u>

$\mathbb{Z}_P$ עם פעולת החיבור והכפל כפי שהגדרנו הוא שדה.

<u>הוכחה</u>

מוגדרות:

יהיו $a,b\in\mathbb{Z}_P$. $a\oplus b=(a+b)\bmod p$, $a\otimes b=(a\cdot b)\bmod p$ השארית המתקבלת אי שלילית וקטנה מ p, ולכן $a\oplus b\in\mathbb{Z}_p, a\otimes b\in\mathbb{Z}_p$.

חילוף:

$$a\otimes b=(a\cdot b)\bmod p=(b\cdot a)\bmod p=b\otimes a,$$

$$a\oplus b=(a+b)\bmod p=(b+a)\bmod p=b\oplus a.$$

איבר נגדי:

יהי $a\in\mathbb{Z}_p$. מכיוון ש $a\in\mathbb{Z}_p$ מתקיים $0\leq a\leq p-1$ ולכן $1\leq p-a\leq p$.

במקרה ש $p-a=p$ אז $a=0$. $(0\oplus 0)=(0+0)\bmod p=0\bmod p=0$ וקיבלנו איבר נגדי.

במקרה ש $p-a\neq p$ אז $1\leq p-a\leq p-1$ ולכן $p-a\in\mathbb{Z}_p$.

$$a\oplus(p-a)=(a+(p-a))\bmod p=p\bmod p=0.$$

איבר הופכי:

תחילה נראה שאין מחלקי אפס ב $\mathbb{Z}_p$.

נניח ש $0\neq a,b\in\mathbb{Z}_P$.

ז"א $a\cdot b=np$ כל מספר טבעי ניתן לרשום כמכפלה של מספרים ראשוניים. ההצגה היא יחידה עד כדי שינוי הסדר.

נרשום $a=\prod_{i=1}^{n}p_i, b=\prod_{i=1}^{k}q_i, n=\prod_{i=1}^{m}t_i$.

מכיוון ש $0\leq a,b\leq p-1$ נקבל שלכל $1\leq i\leq n$ $p_i\neq p$ ולכל $1\leq i\leq k$ $q_i\neq p$.

סה"כ נקבל ש $\prod_{i=1}^{n}p_i\cdot\prod_{i=1}^{k}q_i=\prod_{i=1}^{m}t_i\cdot p$ בסתירה ליחידות ההצגה.

נתבונן בקבוצה $\{a\otimes i \mid 0\leq i\leq p-1\}$. נראה שכל האיברים בקבוצה שונים זה מזה.

אם קיימים שני איברים שונים אז מתקיים $a\cdot i=a\cdot j$ כאשר $i\neq j$.

נניח ב.ה.ג.כ ש $i<j$ ואז $0\neq j-i\in\mathbb{Z}_p$.

סה"כ נקבל ש $a\otimes(j-i)=a\otimes j-a\otimes i=0$.

שדה המספרים המרוכבים

נגדיר פעולות על הקבוצה $\mathbb{C}:=\mathbb{R}\times\mathbb{R}:=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R}\}$.

בצורה הבאה: $0_{\mathbb{C}}:=(0,0)$, $1_{\mathbb{C}}:=(1,0)$, ולכל $(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}$ נגדיר

$(a,b)+_{\mathbb{C}}(c,d)=(a+_{\mathbb{R}}c,b+_{\mathbb{R}}d)$.

$(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}(c,d)=(a\cdot_{\mathbb{R}}c+_{R}(-b\cdot_{\mathbb{R}}d),a\cdot_{\mathbb{R}}d+_{\mathbb{R}}b\cdot_{\mathbb{R}}c)$.

תרגיל

נשנה את פעולת הכפל של $\mathbb{C}$ לפעולה הבאה: $(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c,b\cdot d)$ האם $\mathbb{C}$ נשאר שדה?

פתרון

לא, מכיוון ש $(1,0)\cdot(0,1)=(0,0)$ ואז ל $\mathbb{C}$ יש מחלקי אפס.

סימון

אם $a\in\mathbb{R}$, נכתוב $(a,0)$. כמו כן, נכתוב i במקום $(0,1)$. לפי זה

$a+bi=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=(a,b)$, כלומר אנו כותבים $a+bi$ במקום (a,b).

לכל $z=a+bi\in\mathbb{C}$ נגדיר: $\mathrm{Re}(z)=a,\mathrm{Im}(z)=b,|z|=\sqrt{a^2+b^2},\bar{z}=a-bi$.

תרגיל

נתונים הביטויים: $(5+2i)+(2-3i),(5+2i)-(2-3i),(5+2i)\cdot(2-3i),(5+2i)\cdot(2-3i)^{-1}$.

עבור על אחד מהביטויים הנתונים:

א. חשב את הביטוי (כלומר הצג אותו בצורה $z=a+bi$).

ב. ציין מהם $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z),\bar{z},|z|$.

פתרון

א.

$$(5+2i)+(2-3i)=7-i$$
$$(5+2i)-(2-3i)=3+5i$$
$$(5+2i)\cdot(2-3i)=16-11i$$

כדי לחשב את $\frac{5+2i}{2-3i}$ נכפול את הביטוי ב $\frac{2+3i}{2+3i}$ כאשר $2+3i$ הוא המספר הצמוד של $2-3i$.

$$\frac{5+2i}{2-3i}=\frac{5+2i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{4+19i}{-5}=-\frac{4}{5}-\frac{19}{5}i.$$

ב. נראה רק עבור הביטוי הראשון $z=7-i$.

$$|z|=\sqrt{7^2+(-1)^2}=\sqrt{50},\bar{z}=7+i,\mathrm{Re}(z)=7,\mathrm{Im}(z)=-i.$$

תכונות המספרים המרוכבים

א. $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)$.

ב. $|\mathrm{Re}(z)|\le|z|$.

ג. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

ד. $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}$.

ה. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$.

ו. $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}, \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

ז. אי שיווין המשולש: $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

ח. זהות המקבילית: $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\cdot\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

<u>הוכחה</u>

בכל הסעיפים נסמן $z_1=a_1+b_1i, z_2=a_2+b_2i, z=a+bi$.

א. $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}(a_1+a_2+(b_1+b_2)i)=a_1+a_2=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)$.

ב. $|\mathrm{Re}(z)|=\sqrt{a^2+0^2}\le\sqrt{a^2+b^2}=|z|$.

ג.

$$z_1\cdot z_2=a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i$$
$$|z_1\cdot z_2|^2=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2$$
$$|z_1\cdot z_2|^2=\left(a_1^2\cdot a_2^2-2a_1^2\cdot a_2^2\cdot b_1^2\cdot b_2^2+b_1^2\cdot b_2^2\right)+\left(a_1^2\cdot b_2^2+2\cdot a_1^2\cdot b_2^2\cdot a_2^2\cdot b_1^2+a_2^2\cdot b_1^2\right)$$
$$|z_1\cdot z_2|^2=a_1^2\cdot a_2^2+b_1^2\cdot b_2^2+a_1^2\cdot b_2^2+a_2^2\cdot b_1^2$$
$$|z_1|^2=a_1^2+b_1^2$$
$$|z_2|^2=a_2^2+b_2^2$$
$$|z_1|^2\cdot|z_2|^2=\left(a_1^2+b_1^2\right)\cdot\left(a_2^2+b_2^2\right)=a_1^2\cdot a_2^2+a_1^2\cdot b_2^2+b_1^2\cdot a_2^2+b_1^2\cdot b_2^2$$

ד.

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}=(a_1+a_2)-(b_1+b_2)i=a_1-b_1i+a_2-b_2i=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$
$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i}=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i$$
$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{(a_1+b_1i)}\cdot\overline{(a_2+b_2i)}=(a_1-b_1i)\cdot(a_2-b_2i)=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i$$

ה. $z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$.

ו.

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=2\,\mathrm{Re}(z)$$
$$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi=2i\,\mathrm{Im}(z)$$

ז. מכיוון ש $|z_1+z_2|,|z_1|+|z_2|$ מספרים חיוביים מספיק להוכיח ש $(|z_1|+|z_2|)^2 \ge |z_1+z_2|^2$.

מתכונה ה נקבל ש

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\cdot\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)\cdot\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=z_1\cdot\overline{z_1}+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}=$$
$$=z_1\cdot\overline{z_1}+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}=|z_1|^2+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}+|z_2|^2$$

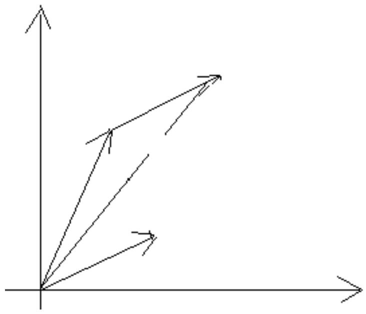
$(|z_1|+|z_2|)^2=|z_1|^2+2\cdot|z_1|\cdot|z_2|+|z_2|^2$ ולכן מספיק להוכיח ש $z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}\le 2\cdot|z_1|\cdot|z_2|$.

מכיוון ש $\overline{z_1\cdot\overline{z_2}}=\overline{z_1}\cdot z_2$ נקבל מסעיף ו ש $z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}=2\,\mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)$.

מסעיפים ב, ג נקבל ש

$$z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}=2\,\mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)\le 2\cdot\left|\mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)\right|\le 2\cdot\left|z_1\cdot\overline{z_2}\right|=2\cdot|z_1|\cdot\left|\overline{z_2}\right|=2\cdot|z_1|\cdot|z_2|=2\cdot|z_1\cdot z_2|$$

<u>המשמעות הגיאומטרית</u>



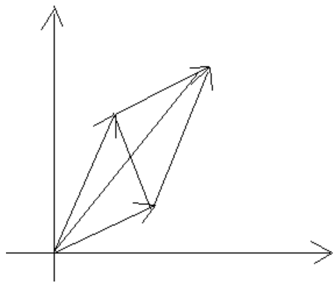
במשולש סכום אורכי שתי צלעות גדול מהצלע השלישית.

ח.

$$\left|z_1-z_2\right|^2=\left(z_1-z_2\right)\cdot\overline{\left(z_1-z_2\right)}=\left(z_1-z_2\right)\cdot\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=\left|z_1\right|^2-z_1\cdot\overline{z_2}-z_2\cdot\overline{z_1}+\left|z_2\right|^2$$

$$\left|z_1+z_2\right|^2=\left(z_1+z_2\right)\cdot\overline{\left(z_1+z_2\right)}=\left(z_1+z_2\right)\cdot\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=\left|z_1\right|^2+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}+\left|z_2\right|^2$$

אם נחבר את שתי השורות נקבל את הדרוש.

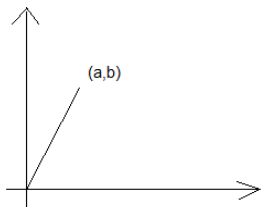


<u>המשמעות הגיאומטרית</u>

במקבילית סכום ריבועי האלכסונים שווה לפעמיים סכום ריבועי צלעות המקבילית.

<u>**קואורדינטות קוטביות**</u>

נרשום כל נקודה במישור באמצעות המרחק מהראשית והזווית שהקטע המחבר את הנקודה עם ראשית הצירים יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה x .



נסמן את המרחק מהראשית ב r ואת הזווית ב θ .

נקבל ש

$$a=r\cos\theta \Leftarrow \cos\theta=\frac{a}{r}$$

$$b=r\sin\theta \Leftarrow \sin\theta=\frac{b}{r}$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\tan\theta=\frac{b}{a}$$

בצורה כזאת על מספר מרוכב $z=a+bi$ ניתן להציג באופן הבא:

$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$.

<u>**דוגמא**</u>

נרשום את המספר $z=\sqrt{3}-3i$ ז"א יש להציג את הנקודה $\left(\sqrt{3},-3\right)$ בעזרת רדיוס וזווית.

$r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-3\right)^2}=\sqrt{12}$.

$\tan\theta=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$ ולכן $\theta=-60^0+180^0k$.

נשים לב שהנקודה נמצאת הרביע הרביעי ולכן $\theta=330^0$.

סה"כ נקבל ש $z=\sqrt{12}\left(\cos\left(330^0\right)+i\sin\left(330^0\right)\right)$.

<u>משפט דמואבר</u>

$\left(r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\right)^n=r^n\left(\cos\left(n\theta\right)+i\sin\left(n\theta\right)\right)$.

<u>תרגיל 1</u>

חשבו את $\left(1+\sqrt{3}i\right)^7$.

<u>פתרון</u>

נעבור לקואורדינטות קוטביות כדי להשתמש במשפט דמואבר.

$r=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\Leftarrow\theta=60^0+180^0k$ ומכיוון שהנקודה נמצאת ברביע הראשון נקבל ש $\theta=60^0$.

$$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos 60^0+i\sin 60^0\right)$$

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^7=2^7\left(\cos\left(7\cdot 60^0\right)+i\sin\left(7\cdot 60^0\right)\right)=128\cdot\left(\cos 60^0+i\sin 60^0\right).$$

<u>תרגיל 2</u>

פתור את המשוואה $z^5=1$.

<u>פתרון</u>

נשים לב ש $1=\cos 360^0k+i\sin 360^0k$ כאשר k מספר שלם.

$z^5=\cos 360^0k+i\sin 360^0k\Leftarrow z_k=\cos 72^0k+i\sin 72^0k$ כאשר $0\le k\le 4$.

סה"כ נקבל חמישה פתרונות למשוואה.