תרגיל

מצאו את כל הקוים הגאודזיים על הגליל $M = \left\{x^2+y^2=R^2\right\}$.
מצאו גם את התבנית היסודית הראשונה, השנייה, אופרטור הצורה, ערכי העקמומיות הראשיים, עקמומיות גאוס ועקמומיות ממוצעת.

פתרון

יש פרמטריזציה: $\begin{matrix} 0 \le u \le 2\pi \\ -\infty < v < \infty \end{matrix}$ $r\left(u,v\right) = \left(R\cos u, R\sin u, v\right)$. נגזרותיה הראשונות:

$$r_{\prime 1} = \left(-R\sin u, R\cos u, 0\right) \qquad r_{\prime 2} = \left(0,0,1\right)$$

$$G = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נורמל:

$$\vec{n} = r_{\prime 1} \times r_{\prime 2} = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\kappa} \\ -R\sin u & R\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(R\cos u, R\sin u, 0\right)$$

$$\hat{n} = \frac{r_{\prime 1} \times r_{\prime 2}}{\left\|r_{\prime 1} \times r_{\prime 2}\right\|} = \frac{1}{R}\cdot\vec{n} = \left(\cos u, \sin u, 0\right)$$

נגזרות שניות:

$$r_{\prime 11} = \left(-R\cos u, -R\sin u, 0\right) \qquad r_{\prime 12} = \left(0,0,0\right) = r_{\prime 21} \qquad r_{\prime 22} = \left(0,0,0\right)$$

תבנית יסודית שנייה:

$$b_{11} = \left\langle r_{\prime 11}, \hat{n}\right\rangle = -R\cos^2 u - R\sin^2 u = -R \qquad b_{21} = \left\langle 0, \hat{n}\right\rangle = 0 = b_{21} \qquad b_{22} = 0$$

$$B = \left(b_{ij}\right) = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה ההפוכה למטריקה:

$$G^{-1} = \left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אופרטור הצורה:

$$s = G^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ערכי העקמומיות הראשיים:

$$\left\{\kappa_1, \kappa_2\right\} = \left\{0, -\frac{1}{R}\right\}$$

עקמומיות גאוס:

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \left(= \det S\right) = 0$$

עקמומיות ממוצעת:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = -\frac{1}{2R}$$

סימני כריסטופל:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(g_{mi\prime j} + g_{m,\in} - g_{ij\prime m}\right)$$

ניתן לחשב חלק בלי הנוסחה, למשל

$$\vec{0} = r_{\prime 12} = \overbrace{\Gamma_{12}^1}^{=0} r_{\prime 1} + \overbrace{\Gamma_{12}^2}^{=0} r_{\prime 2} + \overbrace{b_{12}}^{=0} \hat{n}$$

$$\vec{0} = r_{\prime 21} = \overbrace{\Gamma_{21}^1}^{=0} r_{\prime 1} + \overbrace{\Gamma_{21}^2}^{=0} r_{\prime 2} + \overbrace{b_{21}}^{=0} \hat{n}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

כדי למצוא את Γ_{11}^k נשתמש בנוסחה:

$$\Gamma_{11}^k = \frac{1}{2} g^{km} \cdot \left(g_{m1\prime 1} + g_{m1\prime 1} - g_{11\prime m}\right)$$

נתחיל עם $k = 1$:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{1m} \left(2g_{m1\prime 1} - g_{11\prime m}\right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(2g_{11\prime 1} - g_{11\prime 1}\right) + \cancel{\frac{1}{2} \underbrace{g^{12}}_{=0} \left(2g_{21\prime 1} - g_{11\prime 2}\right)}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left(g_{11\prime 1}\right) = \frac{1}{2R^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial R^2}{\partial u}}_{=0} = 0$$

גם $\Gamma_{11}^2 = 0$.
בסה"כ

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשוואות הגאודזיות:

$$\ddot{\gamma}^1 + \cancel{\overbrace{\Gamma_{ij}^1 \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j}^{=0}} = 0$$

$$\ddot{\gamma}^2+\cancel{\overbrace{\Gamma_{ij}^2\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j}^{=0}}=0$$

$$\begin{cases}\ddot{\gamma}^1=0\\ \ddot{\gamma}^2=0\end{cases}$$

לקואורדינטות שלנו קראנו $\begin{matrix}\gamma^1=u\\ \gamma^2=v\end{matrix}$, ולכן המשוואות הגאודזיות הן $\begin{cases}\ddot{u}=0\\ \ddot{v}=0\end{cases}$. אם פותרים את זה מקבלים שהקווים הגאודזים מתקבלים ע"י קווים ישרים במישור $[uv]$.

תרגיל

מצאו את המשוואות הגאודזיות עבור הטורוס M, שהוא משטח הסיבוב של המעגל $C=\left\{(x-a)^2+z^2=b^2\right\}$ במישור $[xz]$ עבור $a>b$(אין צורך לפתור אותן).

פתרון

פרמטריזציה עבור C:

$$C:\begin{array}{ccccc}x&=&a+b\cos\phi&=&f(\phi)\\ z&=&b\cdot\sin\phi&=&g(\phi)\end{array}\qquad 0\le\phi\le2\pi$$

פרמטריזציה עבור הטורוס M:

$$M:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(\phi)\cos\theta\\ f(\phi)\sin\theta\\ g(\phi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a+b\cos\phi)\cos\theta\\ (a+b\cos\phi)\sin\theta\\ b\sin\phi\end{pmatrix}=r(\theta,\phi)\qquad\begin{array}{c}0\le\theta\le2\pi\\ 0\le\phi\le2\pi\end{array}$$

נגזרות ראשונות:

$$r_{\prime 1}=(-(a+b\cos\phi)\sin\theta,(a+b\cos\phi)\cos\theta,0)$$

$$r_{\prime 2}=(-b\sin\phi\cos\theta,-b\sin\phi\sin\theta,b\cos\phi)$$

תבנית יסודית ראשונה:

$$g_{11}=\langle r_{\prime 1},r_{\prime 1}\rangle=(a+b\cos\phi)^2\qquad g_{11}=0=g_{21}\qquad g_{22}=b^2$$

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}(a+b\cos\phi)^2&0\\0&b^2\end{pmatrix}$$

$$\left(g^{km}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{(a+b\cos\phi)^2}&0\\0&\frac{1}{b^2}\end{pmatrix}$$

סימני כריסטופל:

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{km}\cdot\left(g_{mi\prime j}+g_{mj\prime i}-g_{ij\prime m}\right)$$

נתחיל עם $k=1$:

$$\Gamma^1_{ij} = \frac{1}{2} g^{1m}\left(g_{mi'j} + g_{mj'i} - g_{ij'm}\right) = \frac{1}{2} g^{11}\left(g_{1i'j} + g_{1j'i} + g_{ij'1}\right) + \cancel{\frac{1}{2}\left(g^{12}\right)(\cdots)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(a+b\cos\phi)^2} \cdot \left(g_{1i'j} + g_{1j'i} - g_{ij'1}\right)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2(a+b\cos\phi)^2}\left(g_{11'1} + g_{11'1} - g_{11'1}\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2(a+b\cos\phi)^2} \cdot \left(g_{11'2} + \cancel{g_{12'1}} - \cancel{g_{12'1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}(a+b\cos\phi)^{\cancel{2}}}\left(-\cancel{2}b\cancel{(a+b\cos\phi)}\sin\phi\right) =$$

$$= -\frac{b\sin\phi}{a+b\cos\phi} = \Gamma^1_{21}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2(a+b\cos\phi)^2} \cdot \left(\underbrace{g_{12'2}}_{0} + \underbrace{g_{12'2}}_{0} - \underbrace{g_{22'1}}_{0}\right) = 0$$

$$\left(\Gamma^1_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b\sin\phi}{a+b\cos\phi} \\ -\frac{b\sin\phi}{a+b\cos\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

נעבור ל$k=2$:

$$\Gamma^2_{ij} = \frac{1}{2} g^{2m}\left(g_{mi'j} + g_{mj'i} - g_{ij'm}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2} g^{21}(\cdots)} + \frac{1}{2} g^{22} \cdot \left(g_{2i'j} + g_{2j'i} - g_{ij'2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \left(g_{2i'j} + g_{2j'i} - g_{ij'2}\right)$$

וכן הלאה, עד שמקבלים:

$$\left(\Gamma^2_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \frac{(a+b\cos\phi)\sin\phi}{b} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשוואות הגאוזדיות הקואורדינטות שלנו $\begin{matrix} \gamma^1 = \theta \\ \gamma^2 = \phi \end{matrix}$ הן:

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0 \\ \ddot{\gamma}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0 \end{cases}$$

המשוואה הראשונה:

$$\ddot{\gamma}^1 + \cancel{\Gamma^1_{11}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^1} + \Gamma^1_{12}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2 + \Gamma^1_{21}\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^1 + \cancel{\Gamma^1_{22}\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^2} = 0$$

$$\ddot{\gamma}^1 - \frac{b\sin\phi}{a+b\cos\phi}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2 - \frac{b\sin\phi}{a+b\cos\phi}\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^1 = 0$$

$$\ddot{\gamma}^1 - \frac{2b\sin\phi}{a+b\cos\phi}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2 = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{2b\sin\phi}{a+b\cos\phi}\dot{\theta}\dot{\phi} = 0}$$

המשוואה השנייה:

$$\boxed{\ddot{\phi} + \frac{(a+b\cos\phi)\sin\phi}{b}\left(\dot{\phi}\right)^2 = 0}$$

משטחים מינימליים

הגדרה

משטח M נקרא מינימלי אם העקמומיות הממוצעת שלו זהותית אפס:

$$H \equiv 0$$

הגדרה שקולה

לכל נקודה $p \in M$ יש סביבה שהיא בעלת שטח הפנים הקטן ביותר עם אותה השפה.