...

תרגיל("כשלון חרוץ" של משפטי פוביני וטונלי)

יהיו הממ"חים

$$([0,1]\,, \mathscr{L}([0,1])\,, u) \qquad ([0,1]\,, \mathcal{P}([0,1])\,, u)$$

כאשר $u = m$ היא מידת לבג ו$v = \#$ היא מידת הספירה.
תהי $w = u \times v = m \times \#$ מידת המכפלה. נגדיר את האלכסון

$$D = \{(x,y) | 0 \le x = y \le 1\}$$

א. הוכיחו כי האלכסון D הוא מדיד במרחב המכפלה.

ב. הוכיחו כי המספרים

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} I_D(x,y)\,\mathrm{d}w \qquad \int_{[0,1]}\left[\int_{[0,1]} I_D(x,y)\,\mathrm{d}m(x)\right]\mathrm{d}\#(y) \qquad \int_{[0,1]}\left[\int_{[0,1]} I_D(x,y)\,\mathrm{d}\#(y)\right]\mathrm{d}m(x)$$

כולם שונים זה מזה(!)

פתרון

קודם כל, יש להבין מהו מלבן מדיד במרחב המדובר. התשובה היא שקבוצה מהצורה $R = E \times F$ כאשר $E \subseteq [0,1]$ מדידה לבג ו$F \subseteq [0,1]$ כלשהי. למשל $R = \left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left\{\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}\right\}$ הוא מלבן מדיד ונפחו $|R| = m\left(\left[0,\frac{1}{4}\right]\right)\cdot \#\left(\left\{\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}\right\}\right) = \frac{1}{4}\cdot 3 = \frac{3}{4}$.

נשים ♡: לא מדובר כאן במלבנים כמו שאנחנו מכירים מגיאומטריה(מכפלה קרטזית של קטעים) - אלא כל מכפלה קרטזית של קבוצות מדידות היא מלבן.

א. עבור $\begin{matrix} n = 0,1,2,\ldots \\ k = 1,2,\ldots 2^n \end{matrix}$ נגדיר קטעים $I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ - הם כולם קטעים ולכן מדידים לבג. נגדיר בנוסף $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{2^n} I_{n,k} \times I_{n,k}$.

$$B_0 = \bigcup_{k=1}^{1} I_{0,k} \times I_{0,k} = [0,1] \times [0,1]$$

$$B_1 = \bigcup_{k=1}^{2} I_{1,k} \times I_{1,k} = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

לכל n B_n הוא איחוד בן מנייה של מלבנים מדידים - כלומר בR_σ - ופשוט לראות כי $D = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ כלומר D מטיפוס $R_{\sigma\delta}$. בהרצאה ראינו שקבוצות מטיפוס $R_{\sigma\delta}$ מדידות.

ב. כדי לחשב את המידה $w\left(D\right)$ נזכר במידה החיצונית

$$w^{*}\left(D\right)=\inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty}\left|R_{n}\right|\middle|D\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}R_{n},R_{n}\text{ are measurable rectangles}\right\}$$

יהי $\left\{ R_{n}=E_{n}\times F_{n}\right\} _{n=1}^{\infty}$ כיסוי של D ע"י מלבנים מדידים, ז"א $D\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}R_{n}$.
נזרוק מהאוסף $\left\{ R_{1}\right\} _{n=1}^{\infty}$ את כל המלבנים המדידים עבורם $m\left(E_{n}\right)=0$. נותר לנו חלק <u>לא בן מנייה</u> של האלכסון.

$$D^{1}\subseteq\bigcup_{\substack{n=1\\ m\left(E_{n}\right)>0}}^{\infty}E_{n}\times F_{n}$$

בהכרח ישנו מלבן $R_{n_{0}}=E_{n_{0}}\times F_{n_{0}}$ באוסף הנותר, עבורו $F_{n_{0}}$ אינסופית! (אחרת, המלבנים שנותרו לא יכולים לכסות את D^{1}, שקובצת שיעור שלה לא בתמונה). עבור אותו המלבן

$$\left|R_{n_{0}}\right|=\overbrace{m\left(E_{n_{0}}\right)}^{\gneq0}\cdot\overbrace{\#\left(F_{n_{0}}\right)}^{+\infty}=\infty$$

מכאן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|R_{n}\right|\geq\left|R_{n_{0}}\right|=\infty\implies\sum_{n=1}^{\infty}\left|R_{n}\right|=+\infty$$

כלומר, כל האיברים בקבוצה $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|R_{n}\right|\middle|D\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}R_{n},R_{n}\text{ are measurable rectangles}\right\}$ הם ∞ ולכן $w^{*}\left(D\right)$ שהיא הinf של קבוצה זו שווה לאינסוף: $w^{*}\left(D\right)=\inf\left\{ \infty\right\} =\infty$.

ניתן לחשב את האינטגרל הראשון:

$$\int_{\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]}I_{D}\left(x,y\right)\,\mathrm{d}w=w\left(D\right)=\infty$$

לגבי האינטגרלים הנשנים: לכל $y\in\left[0,1\right]$ קבוע, $\int_{\left[0,1\right]}I_{D}\left(x,y\right)\,\mathrm{d}m=0$ כי $I_{D}\left(x,y\right)$ שווה לאפס כב"מ $\mathrm{d}m\left(x\right)$, ומכאן

$$\int_{\left[0,1\right]}\left[\int_{\left[0,1\right]}I_{D}\left(x,y\right)\,\mathrm{d}m\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}\#\left(y\right)=\int_{\left[0,1\right]}0\,\mathrm{d}\#\left(y\right)=0$$

לכל $x\in\left[0,1\right]$ קבוע

$$\int_{\left[0,1\right]}I_{D}\left(x,y\right)\,\mathrm{d}\#\left(y\right)=\int_{\left\{ x\right\} }\overbrace{I_{D}\left(x,y\right)}^{=1}\,\mathrm{d}\#\left(y\right)+\int_{\left[0,1\right]\backslash\left\{ x\right\} }\overbrace{I_{D}\left(x,y\right)}^{=0}\,\mathrm{d}\#\left(y\right)=\#\left(\left\{ x\right\} \right)+0=1$$

ולכן

$$\int_{[0,1]}\left[\int_{[0,1]} I_D\left(x,y\right)\,\mathrm{d}\#\left(y\right)\right]\,\mathrm{d}m\left(x\right)=\int_{[0,1]}1\,\mathrm{d}m\left(x\right)=1$$

תרגיל

תהי $f\cdot\left(\mathbb{R},\mathscr{L}\left(\mathbb{R}\right)\right)+\mathbb{R}^*$ מדידה. הוכיחו את השוויון:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}m\left(x\right)=\int_0^{\infty}m\left(\left\{x\middle|\left|f\left(x\right)\right|\geq t\right\}\right)\,\mathrm{d}m\left(t\right)$$

פתרון

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}m\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\left|f(x)\right|}1\,\mathrm{d}m\left(t\right)\right]\,\mathrm{d}m\left(x\right)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}I_{\{(x,t)||f(x)|\geq t\}}\,\mathrm{d}m\left(t\right)\right]\,\mathrm{d}m\left(x\right)=$$
$$\overset{\text{Tomelli}}{=}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t)||f(x)\geq t|\}}\,\mathrm{d}m\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}m\left(t\right)=$$
$$=\int_0^{\infty}m\left(\left|f\left(x\right)\right|\geq t\right)\,\mathrm{d}m\left(t\right)$$

הסיבה שמשפט טונלי תרף היא כי מדובר במידות לבג $\mathrm{d}m\left(x\right),\mathrm{d}m\left(t\right)$ שהן שלמות ו־σ־סופיות[1].

בנוסף, יש לבדוק כי הפונקציה $I_{\{(x,t)||f(x)|\geq t\}}$ מדידה. ע"פ אחד מהתרגילים הכרחי ומספיק להראות כי **הקבוצה** $\left\{(x,t)\middle|\left|f\left(x\right)\right|\geq t\right\}$ מדידה.

תרגיל

תהי μ מידה סופית על $\mathbb{R}$ ונגדיר $\alpha\left(x\right)=\mu\left(\left(-\infty,x\right]\right)$. הוכיחו כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha\left(x+c\right)-\alpha\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}m\left(x\right)=c\cdot\mu\left(\mathbb{R}\right)$$

[1]מידה נקראת σ־סופית אם ניתן "לשבור" את המרחב X למספר בן מניה של חתיכות שמידת כל אחת מהן סופית.

פתרון

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha\left(x+c\right)-\alpha\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}m\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mu\left(-\infty,x+c\right]-\mu\left(\left(-\infty,x\right]\right)\right]\,\mathrm{d}m\left(x\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mu\left(\left(x,x+c\right]\right)\,\mathrm{d}m\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{\left(x,x+c\right]}1\,\mathrm{d}\mu\left(t\right)\right]\,\mathrm{d}m\left(x\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}I_{\left\{(x,t)|x<t\leq x+c\right\}}\,\mathrm{d}\mu\left(t\right)\right]\,\mathrm{d}m\left(x\right)=$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}I_{\left\{(x,t)|x<t\leq x+c\right\}}\,\mathrm{d}m\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}\mu\left(t\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}I_{\left\{(x,t)|t>x\geq t-c\right\}}\,\mathrm{d}m\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}\mu\left(t\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}m\left(\left[t-c,t\right)\right)\,\mathrm{d}\mu\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}c\,\mathrm{d}\mu=c\int_{-\infty}^{\infty}1\,\mathrm{d}\mu=c\mu\left(\mathbb{R}\right)$$

אנליזה פונקציונלית

תרגיל

האם הפונקציות הבאות הן נורמה במרחב X המצורף?

א. $\|f\|:=T_{a}^{b}\left[f\right]$, $X=\mathrm{BV}\left(\left[a,b\right]\right)$

ב. $\|f\|=T_{a}^{b}\left[f\right]+\left|f\left(a\right)\right|$, $X=\mathrm{BV}\left(\left[a,b\right]\right)$

פתרון

א. לא! האקסיומה הראשונה של הנורמה $f=0 \iff \|f\|=0$ נכשלת, וזאת משום שלכל פונקציה קבועה $f\equiv c$ יש השתנות אפס, ולא רק לפונקציית האפס.(שאר התנאים מתקיימים, ולמרחב עם התכונות 2,3 קוראים מרחב ספמי־נורמי).

ב. כן!

1. $\|f\|\geq 0$ ויש שווין אם ורק אם $f=0$.
2. לכל $c\in\mathbb{R}$, $\|cf\|=|c|\,\|f\|$.
3. $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$

הוכחה:

1. ברור כי $\|f\| \geq 0$, ויש שווין אס"ם $T_a^b[f] = |f(a)| = 0$. $T_a^b[f] = 0$ אומר כי $f \equiv c$ קבועה, ו־$|f(a)| = 0$ אומר כי הקבוע הזה c הוא 0.
2. $\|cf\| = T_a^b[cf] + |c \cdot f(a)| = |c| \cdot T_a^b[f] + |c| \cdot |f(a)| = |c| \cdot \|f\|$
3. $\|f+g\| = T_a^b[f+g] + |(f+g)(a)| \leq T_a^b[f] + T_a^b[g] + |f(a)| + |g(a)| = \|f\| + \|g\|$