תרגיל בית 4 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשע"ח

שאלה 1. יהיו $I, J \lhd R$ אידאלים קו־מקסימליים (R לא בהכרח חילופי).

א. הוכיחו $I \cap J = IJ + JI$.

ב. הוכיחו כי לכל $n, m \in \mathbb{N}$ גם I^n ו-J^m הם קו־מקסימליים.
תזכורת: בסימון $I^n = I \cdots I$ הכוונה למכפלת אידאלים כאשר I מופיע n פעמים.

שאלה 2. בחוג $R = \mathbb{Z}[x, y]$ נסמן שלושה אידאלים:

$$I_0 = \langle x, y \rangle\,, \qquad I_1 = \langle x-1, y-3 \rangle\,, \qquad I_2 = \langle x-2, y-5 \rangle$$

א. הוכיחו שכל שניים מבין האידאלים הם קו־מקסימליים.

ב. הוכיחו ש-$R/I_1 \cong \mathbb{Z}$ (טענה זו נכונה גם ל-I_0 ול-I_2).

שאלה 3.

א. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{F}_2[x]}\!/\!_{\langle x^2 \rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{F}_2[x]}\!/\!_{\langle x^2-1 \rangle}$$

ב. הוכיחו שהחוגים הבאים **לא** איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{Q}[x]}\!/\!_{\langle x^2 \rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{Q}[x]}\!/\!_{\langle x^2-1 \rangle}$$

ג. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{C}[x,y]}\!/\!_{\langle xy-1 \rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{C}[x,y]}\!/\!_{\langle x^2+y^2-1 \rangle}$$

שאלה 4. יהי R חוג חילופי, יהי $a \in R$ איבר נילפוטנטי (כלומר קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$a^k = 0$), ויהי פולינום $f(x) = r_n x^n + \cdots + r_1 x + r_0 \in R[x]$.

א. הוכיחו כי $a = 0$ או ש-a מחלק אפס.

ב. הוכיחו כי $1 + a \in R^\times$.
תזכורת: אנחנו מסמנים את קבוצת האיברים ההפיכים בחוג R ב-$R^\times$.

ג. הוכיחו שאם $u \in R^\times$, אז גם $u + a \in R^\times$.

ד. הוכיחו כי $f(x)$ הפיך ב-$R[x]$ אם ורק אם r_0 הפיך ו-$r_1, \ldots, r_n$ נילפוטנטיים.

ה. הוכיחו כי $f(x)$ נילפוטנטי ב-$R[x]$ אם ורק אם $r_0, r_1, \ldots, r_n$ נילפוטנטיים.

שאלה 5. ראינו שעבור קבוצה X, אז $(P(X), \triangle, \cap)$ הוא חוג בוליאני. בתרגיל בית 1 הוכחתם שכל חוג בוליאני הוא חילופי. ננסה להוכיח את הכיוון ההפוך: כל חוג בוליאני A משוכן בחוג מן הצורה $(P(X), \triangle, \cap)$.

א. הוכיחו שלכל $a \in A$ מתקיים $a + a = 0$ (ובפרט המאפיין של A הוא 2).

ב. הוכיחו שהשדה היחיד שהוא גם חוג בוליאני הוא $\mathbb{F}_2$.

ג. הוכיחו שלכל אידאל מקסימלי $M \lhd A$ מתקיים $A/M \cong \mathbb{F}_2$.

ד. יהי $M \lhd A$ אידאל מקסימלי ויהי $a \in A$. הוכיחו כי $a \in M$ או $1 - a \in M$, אבל לא שניהם.

ה. יהי $0 \neq a \in A$. הוכיחו שקיים אידאל מקסימלי $M \lhd A$ שאינו מכיל את a.

ו. תהי X קבוצת כל האידאלים המקסימליים של A. הוכיחו שההעתקה $\varphi\colon A \to (P(X), \triangle, \cap)$ השולחת איבר $a \in A$ לקבוצת כל האידאלים המקסימליים שלא מכילים אותו היא שיכון של חוגים.

בהצלחה!