<u>מבנים דיסקרטיים - תרגול 2</u>

<u>הגדרה:</u> חבורה היא קבוצה G עם פעולת כפל $\otimes$: $G\otimes G\to G$ המקיימת את 4 האקסיומות הבאות:

1) **סגירות** (קשירות): $a\otimes b\in G \quad \forall a,b\in G$

2) **אסוציאטיביות** (קיבוציות):

$$\forall a,b,c\in G \quad (a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$$

3) **קיום איבר יחידה** $e\in G$ כך ש: $\forall a\in G\ e\otimes a=a\otimes e=a$

4) **קיום הופכי:** $\forall a\in G\ \exists b\in G\ a\otimes b=b\otimes a=e$

אם בנוסף לארבעת האחרונים מתקיים:

5) **חילופיות**:

$$\forall a,b\in G \quad a\otimes b=b\otimes a$$

אז החבורה נקראת חבורה **חילופית או אבלית** (או **קומוטטיבית**).

אם מתקיים רק 1-3 (כלומר לא מובטח קיום הפכי) אז נקרא לקבוצה **מונואיד**.

אם מתקיים 1-2 (כלומר לא מובטח קיום איבר יחידה) אזי נקרא לקבוצה **אגודה** (semigroup).

אם מתקיים רק 1 אזי נקרא לקבוצה **מאגמה**.

<u>הערה:</u> לעתים רבות נשמיט את סימן פעולת החבורה, ונרשום ישירות ab במקום $a\otimes b$. לעיתים גם משתמשים בסימון $a\cdot b$ אם רוצים להפריד בין האותיות.

<u>הערה:</u> כאשר מתייחסים לחבורה, מקובל לכתוב $(G,\otimes,e)$ כדי לציין את הקבוצה, הפעולה, ואיבר היחידה.

<u>דוגמאות:</u> נבחן מספר דוגמאות של קבוצות ופעולות בינאריות עליהן, ונבחן האם מתקיימות האקסיומות 1-5 עבורן.

1) $S=(\mathbb{N},*)$ כאשר הפעולה * מוגדרת ע"י $a*b=b^a$.

סגירות: כיוון ש $a\in\mathbb{N}$ אזי $b^a=\underbrace{bb\cdots b}_{a\ \text{פעמים}}\in\mathbb{N}$.

הפעולה אינה אסוציאטיבית: $2*(3*2)=(2^3)^2=64\neq 512=2^{(3^2)}=(2*3)*2$.

האם יש ב S איבר יחידה? נניח בשלילה ש $e\in S$ הוא איבר יחידה. אזי

$$1=1^e=e*1=1*e=e^1=e$$

אבל 1 אינה יחידה כיוון ש

$$1*2=2^1=2\neq 1=1^2=2*1$$

1 היא **יחידה שמאלית** (כלומר לכל איבר $a\in\mathbb{N}$ מתקיים $a*1=a$.

כיוון שאין איבר יחידה, אין מה לבדוק את האקסיומה של קיום איבר הפכי.

2) תהי X קבוצה. אזי $(P(X),\cup)$ היא מונואיד אבלי, כאשר $\varnothing$ היא היחידה, בקורס "מתמטיקה בדידה" ראינו סגירות, אסוציאטיביות וקומוטטיביות. P(X) אינה חבורה, כי אין איבר הפכי לאף איבר שונה מ $\varnothing$ (אם $A\cup B=\varnothing$ אזי $A=B=\varnothing$). $(P(X),\cap)$ גם היא מונואיד, כאשר X היא היחידה. לכל איבר $a\in P(X)$ בשני המונואידים מתקיים $a^2=aa=\begin{cases}a\cap a=a\\ a\cup a=a\end{cases}$. לאיברים במונואיד המקיימים $a^2=a$ קוראים **אידמפוטנטים**, ויש להם חשיבות רבה. בחבורה האידמפוטנט היחיד הוא איבר היחידה.

3) תהי X קבוצה לא ריקה. אזי $(P(X),\backslash)$ לא מקיימת אסוציאטיביות. כיוון ש $X\neq\varnothing$ נקח $a\in X$, ואת הקבוצה $\{a\}\in P(X)$, אזי $(\{a\}\backslash\varnothing)\backslash\{a\}=\{a\}\backslash\{a\}=\varnothing$ ולעומת זאת, $\{a\}\backslash(\varnothing\backslash\{a\})=\{a\}\backslash\varnothing=\{a\}\neq\varnothing$. האם קיים איבר יחידה? לא. אם קיים איבר יחידה $E\in P(X)$, אזי $\varnothing=\varnothing\backslash E=E\backslash\varnothing=E$, כלומר בהכרח $E=\varnothing$, אבל $\varnothing$ אינו איבר יחידה אם, כיוון ש $\varnothing\backslash X=\varnothing\neq X$. אבל $\varnothing$ יחידה ימנית.

4) נקח את קבוצת הנקודות על מעגל ברדיוס 1 סביב ראשית הצירים. נגדיר פעולת חיבור על נקודות המעגל בדרך הבאה: נחבר את הזויות (ביחס לציר x ונגד כיוון השעון) של הנקודות, והנקודה המתאימה לזוית הנסכמת תוגדר להיות סכום הנקודות.

<u>הגדרה:</u> **סדר** של חבורה הוא העוצמה של הקבוצה של החבורה.

<u>טבלאות כפל:</u>

כל חבורה סופית מוגדרת לחלוטין ע"י טבלת הכפל המתאימה לפעולה הבינארית של החבורה. נראה כעת דוגמא: נשווה את טבלאות הכפל של החבורה $\mathbb{Z}_4$ (חיבור של המספרים {0,1,2,3} מודולו 4) והחבורה $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ (מכפלה קרטזית של שני עותקים של $\mathbb{Z}_2$) עם הפעולה $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$ (למעשה זה מ"ו ממימד 2 מעל השדה $\mathbb{Z}_2$). חבורה זאת נקראת גם **חבורת קליין**. איבר היחידה הוא (0,0). טבלאות הכפל של שתי החבורות הן:

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

$\mathbb{Z}_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

נשים לב ששתי הטבלאות סימטריות כי החבורות אבליות. שתי החבורות הן שונות! רואים זאת ע"י ההבדל בין האלכסונים. בחבורת קליין כל איבר הפכי לעצמו, וזה לא המצב בחבורה מודולו 4. בחבורות לא אבליות קוראים את הטבלה עמודה*שורה ($row*column$).

נשים לב שכל עמודה וכל שורה בטבלת הכפל היא **תמורה** של האיברים.

<u>תרגיל:</u> אם $(G,*)$ חבורה ולכל $x\in G$ מתקיים $x^2=e$ אז G חבורה אבלית.

<u>הוכחה:</u>

$$\forall x,y\in G$$
$$xx=e\rightarrow x=x^{-1}$$
$$(xy)^2=e$$
$$xyxy=e$$
$$xy=y^{-1}x^{-1}=yx$$

□