פתרון תרגיל 7 אינפי 2 למדמ"ח

שאלה 1

1. היות ו $2\ln x \le \ln^2 x$ (החל מנקודה כלשהיא) אז
$$e^{-\ln x^2} \le e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$
היות ו $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס, אז גם האינטגרל שלנו מתכנס.

2. נפצל את האינטגרל (נראה עוד שניה למה)
$$\int\limits_0^\infty x^2\sin x^4 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^2\sin x^4\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty x^2 \sin x^4 \mathrm{d}x$$
האינטגרל הראשון הוא אינטגרל רגיל והוא קיים. בשביל האינטגרל השני נציב $t = x^4$ כלומר $\mathrm{d}t = 4x^3\mathrm{d}x$ ולכן
$$\int\limits_1^\infty x^2\sin x^4\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{x}\mathrm{d}t = \int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt[4]{t}}\mathrm{d}t$$
(פיצלנו בהתחלה את התחום כדי שכאן לא נגיע לאינטגרל לא אמיתי (גם) מסוג שני.)
האינטגרל שהתקבל מתכנס לפי דיריכלה.

3. מתכנס לפי דיריכלה.

4.
$$\int\limits_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{2\cos(x)}{x}\mathrm{d}x$$
האינטגרל הימני מתכנס לפי דיריכלה והאינטגרל השמאלי מתבדר לכן בסך הכל האינטגרל מתבדר.

5. נשים לב ש
$$\frac{\cos^2(x)}{x} \le \frac{|\cos x|}{x}$$
והיות שבסעיף הקודם ראינו שיש התבדרות גם האינטגרל שלנו מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

6. נפצל את האינטגרל לשני אינטגרלים שלכל אחד מהם בעיה אחת
$$\int\limits_0^\infty \frac{x-\arctan x}{x(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x-\arctan x}{x(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty \frac{x-\arctan x}{x(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x$$

נתחיל באינטגרל הימני

$$\int\limits_1^\infty \frac{x-\arctan x}{x(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x - \int\limits_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

את האינטגרל השמאלי פותרים עם הצבה $t=\arctan x$ ואז

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

שזה מתכנס. והאינטגרל הימני

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

גם מתכנס לפי מבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{x^3}$ ולכן בסך הכל האינטגרל $\int\limits_1^\infty \frac{x-\arctan x}{x(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x$ מתכנס. עכשיו נעבור לאינטגרל השמאלי

$$\int\limits_0^1 \frac{x-\arctan x}{x(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x$$

הנקודה הבעייתית היא 0, שבה הפונקציה לא מוגדרת. אבל לפי לופיטל

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x(1+x^2)\arctan x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x\arctan x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x+\frac{x}{1+x^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{(1+x^2)\arctan x + x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2x\arctan x+1+1} = 0$$

ולכן הפונקציה חסומה בסביבת 0 ולכן זה אינטגרל רגיל שמתכנס. לסיכום, קיבלנו שגם האינטגרל המקורי מתכנס.

.7

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{|\ln x|}}\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{-\ln x}}\mathrm{d}x$$

נציב $t=-\ln x$ ולכן $\mathrm{d}t=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ כלומר

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{-\ln x}}\mathrm{d}x = -\int\limits_{-\ln\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int\limits_0^{-\ln\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

וזה אינטגרל מתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס.

.8

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}} + \int_1^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}}$$

את האינטגרל השמאלי ניתן להשוות עם

$$\frac{x}{\sqrt{x^3+x}}$$

ולקבל

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan}{x} = 1$$

כמו כן,

$$\frac{x}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}$$

שאת זה אפשר להשוות במבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$. היות ו $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ מתכנס. גם האינטגרל השמאללי מתכנס. את האינטגרל הימני אפשר להשוות במבחן ההשוואה הגבולי ל $\frac{1}{x^{1.5}}$ולקבל

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}\arctan x}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{\pi}{2}$$

היות ו $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס גם האינטגרל שלנו מתכנס.

שאלה 2

1. אם $\alpha \leq 1$ נשים לב ש

$$\frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}$$

היות ו $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}$ מתבדר (זה כמו בשאלה 1 סעיף 5) ברור שגם האינטגרל שלנו מתבדר. לעמות זאת אם $\alpha > 1$ אז היות ו

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} - \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x^\alpha}$$

שהאינטגרל הימני מתכנס לפי דיריכלה וגם האינטגרל השמאלי מתכנס ולכן האינטגרל הכולל גם מתכנס.

.2

$$\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

נבצע מבחן ההשוואה עם

$$\frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

קל לראות ש

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2(x)}{x^2}=1$$

היות ו $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}\mathrm{d}x$ מתכנס אם ורק אם $\alpha < 3$ אז גם האינטגרל שלנו מתכנס במצבים אלה.

.3

$$\int_0^1 |\ln(x)|^\alpha \mathrm{d}x$$

עבור $\alpha > 0$ נבצע השוואה עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$, ונקבל

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\ln(x)|^\alpha}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}|\ln(x)|^\alpha=0$$

היות ו $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ מתכנס גם האינטגרל שלנו מתכנס. עבור $\alpha = 0$ ברור שהאינטגרל מתכנס. עבור $a > 0$ נקבל שעדיין האינטגרל לא אמיתי, והפעם הבעיה ב 1. (בסביבת 0 הפונקציה חסומה). אפשר לכתוב את האינטגרל כ

$$\int_0^1 \frac{1}{|\ln(x)|^\beta}\mathrm{d}x$$

כאשר $\beta = -\alpha > 0$. נתמקד בחלק הבעייתי

$$\int_a^1 \frac{1}{|\ln(x)|^\beta}\mathrm{d}x$$

כאשר $a > 0$ נבצע השוואה עם $\frac{1}{x|\ln(x)|^\beta}$ ונקבל

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x|\ln(x)|^\beta}{|\ln(x)|^\beta}=\lim_{x\to 1^-} x = 1$$

את האינטגרל הזה

$$\int_a^1 \frac{1}{x|\ln(x)|^\beta}\mathrm{d}x = \int_a^1 \frac{1}{x(-\ln(x))^\beta}\mathrm{d}x$$

קל לחשב, נציב $t = -\ln x$ ולכן $\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

$$\int_a^1 \frac{1}{x(-\ln(x))^\beta}\mathrm{d}x = -\int_{\ln a}^0 \frac{1}{t^\beta}\mathrm{d}t = \int_0^{\ln a} \frac{1}{t^\beta}\mathrm{d}t$$

האינטגרל הזה מתכנס כאשר $\beta < 1$. לסיכום האינטגרל המקורי מתכנס כאשר $\alpha > -1$.

שאלה 3

סעיף א

נציב $z = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ואז $\mathrm{d}z = f(x)\mathrm{d}x$ כלומר

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = \int_a^\infty \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \infty$$

כאשר $a = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ נשים לב שהשתמשנו בנתון $\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t = \infty$ כדי לקבוע את הגבול העליון של האינטגרל אחרי הצבה.

סעיף ב

נבחר

$$f(x) = e^{-x}$$

ואז לפי השיקול בסעיף א נקבל

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{z}\mathrm{d}z < \infty$$

כאשר $a = \int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x = 1 - e^{-1}$ ו $b = \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = 1$.