

## מבוא לתורת החבורות תרגיל 10

1. תהי  $G$  חבורה שפועלת על קבוצה  $X$  כך שיש  $x \in X$  עם:  $|orb(x)| = 2$ . הוכיחו שיש ב- $G$  תת חבורה נורמלית.

2. תהי  $G$  חבורה מסדר 77 הפועלת על קבוצה  $X$  בת 6 איברים. הוכיחו שהפעולה טריוויאלית.

כל מסלול צריך לחלק את הגודל של  $G$ . אף מספר בין 2 ל 6 לא מחלק את 77 ולכן כל המסלולים הם באורך 1 כלומר הפעולה טריוויאלית

$$g * x = x$$

3. תהי  $\pi = (1, 2, 3, 4) (5, 6, 7) (8, 9, 10) \in S_{10}$ . חשבו את סדר המרכז  $|C_{S_{10}}(\pi)|$ . המרכז  $C_{S_{10}}(\pi)$  הוא המייצב לגבי פעולת ההצמדה של  $S_{10}$  על עצמה. המסלול הוא מחלקת הצמידות של  $\pi$ , וידוע לנו כי

$$|conj(\pi)| = [S_{10} : C_{S_{10}}(\pi)] = \frac{|S_{10}|}{|C_{S_{10}}(\pi)|}$$

ולכן מספיק לחשב כמה תמורות צמודות ל- $\pi$  ב- $S_{10}$ . אך מחלקות צמידות ב- $S_n$  נקבעות לפי מבנה המחזורים. כמה מחזורים יש מן המבנה  $(4, 3, 3)$ ? ודאו שאתם יודעים לפתור את השאלה הקומבינטורית הזו ולקבל:

$$\begin{aligned} |C_{S_{10}}(\pi)| &= \frac{|S_{10}|}{|conj(\pi)|} = \frac{10!}{\binom{10}{4}(4-1)!\binom{10-4}{3}(3-1)!\binom{6-3}{3}(3-1)!\frac{1}{2!}} \\ &= \frac{10!}{\frac{10!}{4!6!} 3! \frac{6!}{3!3!} 2! \frac{3!}{3!0!} 2! \frac{1}{2!}} = 72 \end{aligned}$$

4. מצאו את הגדלים של מחלקות הצמידות בחבורה  $D_5$ . (רמז: אין צורך למצוא את מחלקות הצמידות במפורש)

5. תהי  $G$  חבורה ו $H \leq G$  תת חבורה. נסמן:  $N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$  ה"מנרמל" של  $H$  ב $G$ . זוהי תת חבורה. הוכיחו: מס' תת החבורות של  $G$  הצמודות ל $H$  שווה ל $[G : N_G(H)]$ . (רמז:  $G$  פועלת על תת החבורות שלה ע"י הצמדה)

6. רוצים לבנות צמיד בעל 16 חרוזים מחרוזים ב2 צבעים. כמה צמידים כאלו אפשר לבנות? (רמז: הלמה של ברנסהייד)

7. רוצים לבנות לוח משבצות בגודל  $4 \times 4$  ולצבוע כל משבצת בשחור או לבן. 2 לוחות נקראים שווים אם אפשר להגיע מאחד לשני ע"י סיבוב. כמה לוחות כאלו יש?