מד"ר - תרגול 8

25 באוגוסט 2011

מערכות משוואות לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים - תזוכרת

נתונה מערכת משוואות

$$\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}$$

ראינו שיעור שעבר כי אם הע"ע שונים וממשיים אז הפתרון הוא מהצורה:

$$\overrightarrow{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\overrightarrow{v_2} + ...$$

מקרה ב'

אם הע"ע מרוכבים אז לכל ע"ע (ו-ו"ע) "נתרם" גם הצמוד שלו.
על מנת למצוא ו"ע ממשיים מפרידים בין החלק הממשי למדומה ויורצים וקטורים חדשים.

מקרה ג'

אין ו"ע לכל ע"ע.
במקרה זה נחפש פתרון נוסף מהצורה

$$\overrightarrow{x}(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix}$$

(כלומר כאן הריבוי האלגברי של הע"ע גדול יותר, יש יותר ע"ע מו"ע).

דוגמה 1

פתור

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\overrightarrow{x}$$

פתרון

נסמן

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

נמצא ע"ע:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)(-1-\lambda) + 8 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \end{aligned}$$

נמצא ו"ע עבור $\lambda_1 = 1 + 2i$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
(1-i)\,a - b &= 0 \\
2a - (1+i)\,b &= 0
\end{aligned}$$

אפשר לראות כי השורות ת"ל לכן

$$b = (1-i)\,a$$

לכן הו"ע של λ_1 הוא:

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

הוקטור העצמי שמתאים לע"ע λ_2 יהיה הצמוד של $\overrightarrow{v_1}$:

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

אז הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + c_2 e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

הערה

על מנת לקבל ו"ע ממשיים מפרידים בין ממשי למרוכב:

$$\begin{aligned}
y &= c_1 e^t e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + c_2 e^t e^{-2it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&= c_1 e^t (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + c_2 e^t (\cos(-2t) + i \sin(-2t))
\end{aligned}$$

נמשיך ע"י הפרדת הוקטורים

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

דוגמה 2

פתור:

$$\overrightarrow{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}$$

פתרון

ניתן לראות שע"ע הם

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \lambda_2 = 1 \\
\lambda_3 &= 2
\end{aligned}$$

עבור 1 נקבל את הו"ע:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-6\end{pmatrix}$$

עבור 2 נקבל את הו"ע:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

יש לנו וקטור עצמי אחד לע"ע מריבוי 2.
נחפש פתרון נוסף מהצורה:

$$\overrightarrow{x}(t)=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}P_1(t)\\ \vdots\\ P_n(t)\end{pmatrix}$$

כאשר דרגת הפולינום P קטנה ב1 מהריבוי האלגברי של הע"ע.
לכן מחפשים פתרון מהצורה

$$\overrightarrow{x}(t)=e^{t}\begin{pmatrix}a_0+a_1t\\ b_0+b_1t\\ c_0+c_1t\end{pmatrix}$$

כדי למצוא את המקדמים הנ"ל נציב במשוואה:

$$x_1'(t)=a_0e^t+a_1e^t+a_1te^t=e^ta_1(1+t)+a_0e^t$$

נציב במשוואה המקורית:

$$e^t\begin{pmatrix}a_1(1+t)+a_0\\ b_1(1+t)+b_0\\ c_1(1+t)+c_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\3&6&2\end{pmatrix}e^t\begin{pmatrix}a_1t+a_0\\ b_1t+b_0\\ c_1t+c_0\end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת ונקבל

$$\begin{aligned}a_1&=0\\ b_1&=-4a_0\\ c_0&=24a_0-6b_0\\ c_1&=24a_0\end{aligned}$$

נקבל שהפתרון הנוסף עבור $\lambda=1$ הוא

$$x(t)=e^t\begin{pmatrix}a_0\\ -4a_0t+b_0\\ (24a_0-6b_0)t+24a_0\end{pmatrix}=e^ta_0\begin{pmatrix}1\\-4t\\24t+24\end{pmatrix}+e^tb_0\begin{pmatrix}0\\1\\-6\end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\overrightarrow{x}=a_0e^t\begin{pmatrix}1\\-4t\\24t+24\end{pmatrix}+b_0e^t\begin{pmatrix}0\\1\\-6\end{pmatrix}+ce^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

מערכת משוואות הומוגניות עם מקדמים קבועים

עד עכשיו השתמשנו בשיטה של ערכים עצמיים ולכסון מטריצה.
שיטה נוספת לפתרון היא דרך הקטנת המימד.

שיטה ב' - הקטנת המימד

משתמשים בשיטה זו כשנתון אחד הפתרונות וצריך למצוא את האחרים.
נתונה מערכת משוואות

$$\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}$$

נתון פתרון

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ \vdots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}$$

נרצה למצוא $(n-1)$ פתרונות נוספים.נקבל אותם על ידי החלפת משתנים:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{x_k^0}{x_n^0} x_n \\ y_n &= \frac{1}{x_n^0} x^n \end{aligned}$$

דוגמה 3

נתון $t > 0$:

$$\begin{aligned} tx_1' &= 2x_1 - x_2 \\ tx_2' &= 3x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

1. הראה שיש למערכת פתרון לא טריוויאלי שבו $x_1 = x_2$.
2. בנה משפחה בסיסית של פתרונות.

פתרון

1. נניח $x_1 = x_2$ אז נקבל:

$$\begin{aligned} tx_1' &= x_1 \\ \frac{x_1'}{x_1} &= \frac{1}{t} \\ \int \frac{1}{x_1} dx_1 &= \int \frac{1}{t} dt \\ \ln x_1 &= \ln t + c \\ x_1 &= c \cdot t \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

פתרון כנ"ל.

2.

$$\begin{cases} x_1' &= \frac{2}{t} x_1 - \frac{x_2}{t} \\ x_2' &= \frac{3}{t} x_1 - \frac{2}{t} x_2 \end{cases}$$

נשתמש בהקטנת מימד. במקרה שלנו $n = 2$. נסמן:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \frac{t}{t} x_2 = x_1 - x_2 \\ y_2 &= \frac{1}{t} x_2 \end{aligned}$$

מוטיבציה: ננסה להוריד את המימד של המשוואה המקורית ע"י ההצבות הנ"ל.

$$\begin{aligned}
y_1^{'} &= x_1^{'} - x_2^{'} = \frac{2}{t}x_1 - \frac{1}{t}x_2 - \frac{3}{t}x_1 + \frac{2}{t}x_2 \\
&= -\frac{1}{t}x_1 + \frac{1}{t}x_2 = -\frac{1}{t}\left(x_1 - x_2\right) = -\frac{y_1}{t} \\
y_2^{'} &= \frac{x_2^{'} \cdot t - x_2}{t^2} = \frac{1}{t}x_2^{'} - \frac{1}{t^2}x_2 = \frac{3}{t^2}x_1 - \frac{2}{t^2}x_2 - \frac{1}{t^2}x_2 \\
&= \frac{3}{t^2}x_1 - \frac{3}{t^2}x_2 = \frac{3}{t^2}\left(x_1 - x_2\right) = \frac{3}{t^2}y_1
\end{aligned}$$

קיבלנו מערכת משוואות:

$$\begin{aligned}
y_1^{'} &= -\frac{y_1}{t} \\
y_2^{'} &= \frac{3}{t^2}y_1
\end{aligned}$$

נפתור:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{c}{t} \\
y_2 &= \int \frac{3}{t^2} \cdot \frac{c}{t} dt = -\frac{3c}{2}\frac{1}{t^2} + c_2
\end{aligned}$$

לכן נציב

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 + t y_2 \\
&= \frac{c}{t} - \frac{3c}{2t} + c_2 t \\
x_2 &= t y_2 = -\frac{3c}{2t} + c_2 t
\end{aligned}$$

וזהו הפתרון.

שיטת חילוץ והצבה - דוגמה 4

$$\begin{aligned}
x_1^{'} &= x_1 - 2x_2 \\
x_2^{'} &= 5x_1 + 3x_2
\end{aligned}$$

מוטיבציה: כאשר 2 השיטות הקודמות לא עובדות.

פתרון

נחלץ לדוגמה מהמשוואה הראשונה את x_2:

$$x_2 = \frac{x_1 - x_1^{'}}{2}$$

נגזור:

$$x_2^{'} = \frac{x_1^{'} - x_1^{''}}{2}$$

נציב במשוואה השניה:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^{'} - x_1^{''}}{2} &= 5x_1 + \frac{3x_1 - 3x_1^{'}}{2} \\
x_1^{'} - x_1^{''} &= 10x_1 + 3x_1 - 3x_1^{'} \\
x_1^{''} - 4x_1^{'} + 13x_1 &= 0
\end{aligned}$$

נפתור את המשוואה האינדיציאלית, נקבל

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2+3i\\ \lambda_2 &= 2-3i\end{aligned}$$

ולכן

$$x_1(t) = e^{2t}\left(c_1\cos(3t)+c_2\sin(3t)\right)$$

נמצא את x_2 בעזרת

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 - x_1^{'}\right)$$

כלומר נגזור את הפתרון x_1 ואז נציב

$$x_1^{'}(t) = 2e^{2t}\left(c_1\cos(3t)+c_2\sin(3t)\right) + e^{2t}\left(-c_1\sin(3t)+c_2\cos(3t)\right)$$

אזי

$$\begin{aligned}x_2 &= -\frac{e^{2t}}{2}\left(c_2\cos(3t)-c_1\sin(3t)+c_1\cos(3t)+c_2\sin(3t)\right)\\ &= -\frac{e^{2t}}{2}\left((c_1+c_2)\cos(3t)+(c_2-c_1)\sin(3t)\right)\end{aligned}$$

הערה

כתוצאה משיטת החילוץ אפשר לקבל שיטה לפתרון מערכות הומוגניות במקדמים קבועים. שיטה זו עלולה להיות ארוכה אך היא יעילה כאשר המטריצה אינה לכסינה.

מערכת משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים

משוואה מהצורה

$$\overrightarrow{x}^{\,'} = A\overrightarrow{x} + \overrightarrow{g}(t)$$

דוגמה 5

פתור

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}^{\,'} &= A\overrightarrow{x} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^t\\ A &= \begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

נמצא פתרון הומוגני ופתרון פרטי.
עבור הומוגני

$$\overrightarrow{x} = A\overrightarrow{x}$$

נמצא ע"ע ו-ו"ע מתאימים, נקבל

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1\\ v_1 &= \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\\ \lambda_2 &= -1\\ v_2 &= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\\ \lambda_3 &= 4\\ v_3 &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

הפתרון ההומוגני הוא

$$x_h(t) = \alpha e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta e^{t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \delta e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

המשוואות הדרושות לפי וריאצית פרמטרים הפרטית הן הבאות כי סדר המשוואה הוא 1 ולכן גוזרים רק את הקבועים:

$$\begin{aligned}\alpha' e^{4t} + \beta' e^{t} + \delta' e^{-t} &= e^{t}\\ \alpha' e^{4t} - 2\beta' e^{t} + 0 &= 0\\ \alpha' e^{4t} + \beta' e^{t} - \delta e^{-t} &= e^{t}\end{aligned}$$

לאחר פתירת מערכת משוואות נקבל:

$$\begin{aligned}\delta' &= 0\\ \beta' &= \frac{1}{3}\\ \alpha' &= 2\beta e^{-3t}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\delta &= c_1\\ \beta &= \frac{1}{3}t + c_2\\ \alpha &= -\frac{2}{9}e^{-3t} + c_3\end{aligned}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא

$$y_p = \left(-\frac{2}{9}e^{-3t} + c_3\right)e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}t + c_2\right)e^{t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

והפתרון הכללי הוא

$$y = y_h + y_p$$