(1) 22.12.13
אושרה פרץ
תרגול 9

פונקציות פשוטות

הגדרה: פונקציה f המוגדרת על קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}$ נקראת **פשוטה** אם היא מדידה ומקבלת לכל היותר מספר בן מניה של ערכים.

דוגמה: הפונ' $f(x)=\lfloor x\rfloor$ שמוגדרת על $\mathbb{R}$ היא פשוטה כי f מדידה (כי f מונוטונית) ו-f מקבלת מס' בן מניה של ערכים כי $f(\mathbb{R})=\mathbb{Z}$.
$\Leftarrow$ ולכן f פשוטה.

דוגמה: סוף: f רציפה היא פשוטה אמ"מ היא קבועה.
אם f לא קבועה אז f מקבלת את הערכים x ו-y, ונניח בה"כ ש $y<x$.
אז כיוון ש f רציפה, f מקבלת את כל הערכים בקטע $[y,x]$ ולכן f מקבלת יותר ממספר בן מניה של ערכים.

דוגמה: תהי $f=I_E$,

$$I_E(x)=\begin{cases}0 & x\notin E\\ 1 & x\in E\end{cases}$$

נוכיח ש f פשוטה אמ"מ E קבוצה מדידה (כלומר E קבוצת בורל)

כיוון ש f מקבלת רק מספר בן מניה של ערכים ($0,1$), נשאר להוכיח ש f מדידה.
נוכיח את שני הכיוונים.
- f מדידה $\Leftarrow$ E מדידה:
כיוון ש $f^{-1}(\{1\})=E$; $\{1\}$ היא קבוצת בורל, ו f מדידה, נובע ש E מדידה.

- E מדידה $\Leftarrow$ f מדידה:
נוכיח שלכל $a\in\mathbb{R}$: הקבוצה $f_a=\{x\in\mathbb{R}: f(x)<a\}$ היא מדידה.

$$f_a=\begin{cases}\emptyset & a\le 0\\ E^c & 0<a\le 1\\ \mathbb{R} & a>1\end{cases}$$

עבור אלו x נקבל ערכים שליליים
עבור אלו x נקבל ערכים שבין 0 ל 1

ולכן f_a מדידה כי E מדידה, ולכן E^c מדידה.

הגדרה: ההצגה של הפונ' הפשוטה f כ $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n I_{E_n}(x)$ (*) נקראת הצגה קנונית
אם מתקיים:

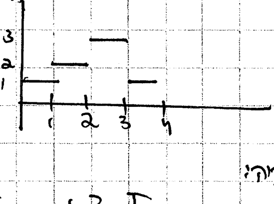
א. לכל $n\ge 1$: $E_n\neq\emptyset$

ב. לכל $i\neq j$ $E_i\cap E_j=\emptyset$

ג. לכל $i\neq j$, $a_i\neq a_j$

מניחים שלכל n, E_n מדידה

דוגמה: נתונה הפונקציה f:



אז ההצגה הקנונית של f תהיה:

$$f(x)=1\cdot I_{[0,1)\cup[3,4]}+2\cdot I_{[1,2)}+3\cdot I_{[2,3)}$$

(2) 22.12.13

[illegible]

תרגול 9

נסמן ב-μ את מידת לבג על $B(\mathbb{R})$.

[מידת לבג - המידה שנותנת לכל קטע את אורכו, ואז מרחיבים את μ ל-$B(\mathbb{R})$ כך שתהיה σ אדטיבית)

נניח ש-(*) היא ההצגה הקנונית של פונקציה f אז נגדיר את <u>אינטגרל לבג</u> של f להיות:

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(E_n)$$

<u>דוגמה:</u> תהי f הפונ' הפשוטה: $f(x) = 3\cdot I_{(-\infty,4)}(x) + 2\cdot I_{[0,7]}(x)$

תחשבו את האינטגרל של f על הקבוצות: $E_1 = [0,1]$, $E_2 = [-1,0]\cup[2,3]$,

$E_3 = (-\infty,-1)$, $E_4 = [0,\infty)$

פתרון: קודם נמצא את ההצגה הקנונית של f:

$$f(x) = 3\cdot I_{(-\infty,0)} + 3\cdot I_{[0,4)} + 2\cdot I_{[0,4)} + 2\cdot I_{[4,7]}$$

$$= 3I_{(-\infty,0)} + 5I_{[0,4)} + 2I_{[4,7]}$$

ולכן מתקבלת אינטגרל לבג:

$$\int_{[0,1]} f\,d\mu = 3\mu((-\infty,0)\cap[0,1]) + 5\mu([0,4)\cap[0,1]) + 2\mu([4,7]\cap[0,1])$$

$$= 3\mu(\emptyset) + 5\underbrace{\mu([0,1])}_{1} + 2\mu(\emptyset) = 5$$

$$\int_{[-1,0]\cup[2,3]} f\,d\mu = 3\mu((-\infty,0)\cap([-1,0]\cup[2,3])) + 5\mu([0,4)\cap([-1,0]\cup[2,3])) + 2\mu([4,7]\cap([-1,0]\cup[2,3]))$$

$$= 3\mu([-1,0)) + 5\mu([2,3]) + 2\mu(\emptyset) = 3+5 = 8$$

$$\int_{(-\infty,-1)} f\,d\mu = 3\mu((-\infty,0)\cap(-\infty,-1)) + 5\mu(\emptyset) + 2\mu(\emptyset)$$

$$= 3\mu((-\infty,-1)) = \infty \Rightarrow$$ f לא אינטגרבילית לבג על $(-\infty,-1)$ הנ"ל