

# מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 12

1. יהיו  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  מרחבים מטריים. הוכחנו

בכיתה שאם נגדיר  $d: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  באופן הבא:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

אזי  $d$  היא מטריקה.

המתריקות  $d_X$  ו- $d_Y$  משרות טופולוגיות על  $X$  ועל  $Y$  שיוצרות בסופו של דבר את טופולוגית המכפלה  $\tau_X$  על  $X \times Y$ .

הוכיחו שטופולוגיה המושרת על  $X \times Y$  על ידי המטריקה  $d$  מתלכדת עם  $\tau_X$ .

2. יהיו  $X_1, X_2$  שני העתקים זרים של  $\mathbb{R}$ . נגדיר על

$X = X_1 \sqcup X_2$  יחס שקילות  $\sim$  באופן הבא:

$x_1 \sim x_2$  אם  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$  ו- $x_1 = x_2 > 0$

(במלים אחרת היחס  $\sim$  מדביק שני העתקים של קרן  $(-\infty, 0)$  לזה).

הוכיחו שמרחב המנה  $X/\sim$  אינו מרחב האוסדורף, בפרט שכל שתי סביבות  $U_1, U_2 \subseteq X/\sim$  של הנקודה '0' נחתכות.

3. הוכיחו שהרכבה של שתי העתקות מנה היא העתקת מנה.

4. יהיו  $X, Y$  מרחבים טופולוגיים,  $X$  מרחב קומפקטי ו- $Y$  מרחב האוסדורף. תהי  $f: X \rightarrow Y$  העתקה על. הוכיחו ש- $f$  היא העתקת מנה.

5. יהי  $\sim$  יחסי שקילות על  $\mathbb{R}^2$  שונים. לכל יחס " $\sim$ " בררו למה הומאומורפי מרחב מנה  $\mathbb{R}^2/\sim$ :  
א'  $(x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow \max\{|x|, |y|\} = \max\{|u|, |v|\}$   
ב'  $(x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow x + y = u + v$

6. יהי  $X \times Y \times Z$  מרחב המכפלה של מרחבים טופולוגיים  $X, Y, Z$ . תהי  $p: X \times Y \times Z \rightarrow X \times Z$  העתקה שמוגדרת לכל  $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$  כך ש- $p(x, y, z) = (x, z)$ . האם  $p$  העתקת מנה? נמקו.