תירגול לינארית למורים בש תשפב סמסטר ב

30 במרץ 2022

לינארית

1. שורשי יחידה מסדר n = כל המספרים המרוכבים המקיימים את המשוואה $z^n = 1$.
מה המכפלה של כל שורשי היחידה מסדר n?
פתרון: הפתרונות למשוואה $z^n = 1$ הם (כיוון ש $1 = 1\mathrm{cis}(0)$):

$$\sqrt[n]{1}\mathrm{cis}\left(\frac{0+2\pi k}{n}\right) = \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

עבור $0 \le k \le n-1$. (למשל עבור $n = 6$ נקבל שהפתרונות הם

$$\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right), \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{n}\right), \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 2}{n}\right), \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 3}{n}\right), \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 4}{n}\right), \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 5}{n}\right)$$

ומסמנים עם k לצורך הקצרנות). כעת, לפי דה מואבר הכפלה של שני cis זה פשוט cis של חיבור הזוויות וזה ניתן להכללה לכל מכפלה של מספר סופי של מספרים ולכן אצלנו (כמו $\sum$ הסימון $\prod$ זה מכפיל דברים):

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi\cdot k}{n}\right) &= \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right)\cdot\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{n}\right)\cdots\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}\right)\\ &= \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}+\frac{2\pi\cdot 1}{n}+\cdots+\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}\right)\\ &= \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\cdot[0+1+\cdots+(n-1)]\right)\\ &= \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\cdot\left[\frac{n-1}{2}\cdot n\right]\right)\\ &= \mathrm{cis}\left(\pi\left(n-1\right)\right)\end{aligned}$$

ולכן מכפלת כל שורשי היחידה מסדר n הוא $\mathrm{cis}\left(\pi\left(n-1\right)\right)$ ששווה ל: אם n אי זוגי נקבל ש $n-1$ זוגי ואז

$$\mathrm{cis}\left(\pi\left(n-1\right)\right) = \mathrm{cis}\left(\pi\text{זוגי}\right) = \mathrm{cis}(0) = 1$$

ואם n זוגי אז $n-1$ אי זוגי ואז

$$\mathrm{cis}\left(\pi\left(n-1\right)\right) = \mathrm{cis}\left(\pi\text{אי זוגי}\right) = \mathrm{cis}\left(\pi\right) = -1$$

(א) בואו נעשה אותו תרגיל אבל עם "הוכחה" נוספת:
כמו שראינו שורשי היחידה מסדר n הם $\text{cis}\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$ עבור $0 \le k \le n-1$ ולפי דה מואבר

$$\left[\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^k = \underbrace{\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}_{k} = \text{cis}\left(\underbrace{\frac{2\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}+\cdots\frac{2\pi}{n}}_{k}\right) = \text{cis}\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

נסמן $q = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ ונקבל שכל הפתרונות למשוואה $z^n = 1$ הם q^k עבור $0 \le k \le n-1$ ואז המכפלה של כולם היא:

$$q^0 \cdot q^1 \cdots q^{n-1} = q^{0+1+\cdots+(n-1)} = q^{\frac{n-1}{2}\cdot n} = (q^n)^{\frac{n-1}{2}} \underbrace{=}_{q^n=1} (1)^{\frac{n-1}{2}} = 1$$

אבל זה לא ייתכן כי למשל הפתרונות של $z^2 = 1$ הם ± 1 שהמכפלה שלהם היא $(-1)\cdot 1 = -1$.
למה? במרוכבים חוקי חזקות לא בהכרח עובדים! מה כן עובד? חזקות שלמות, למשל:

$$\left(z^2\right)^5 = z^{2\cdot 5} = \left(z^5\right)^2$$

אבל חזקות לא שלמות, למשל אם ניקח $n = 2$ ונציב למעלה בחלק האדום נקבל את השיוויון

$$q^{\frac{1}{2}\cdot 2} = \left(q^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

שהוא לא נכון מכיוון שחזקת $\frac{1}{2}$ אינה מוגדרת במרוכבים (לפחות באופן פשוט). במעבר האחרון (הירוק) קיבלנו

$$1^{\frac{1}{2}} = 1$$

שזה לא שיוויון נכון במרוכבים כי גם -1 הוא "שורש" של 1 (כי $(-1)^2 = 1$). מה ההבדל בין הממשיים למרוכבים?
ההבדל שבממשיים לכל מספר חיובי a יש מספר <u>חיובי</u> יחיד b כך ש $a^n = b$ אבל חיוביות/שליליות זה לא מושגים שמוגדרים כמו שצריך במרוכים. למשל i הוא לא חיובי ולא שלילי. אז איך נגדיר $\sqrt{-1}$? זה i או $-i$? הפתרונות של $z^3 = 1$ הם

$$1, \text{cis}\,(120)\,, \text{cis}\,(240)$$

ומי מהם הוא $\sqrt[3]{1}$?
ואם נסתכל על $z^3 = i = 1\text{cis}\,(90)$ אז הפתרונות

$$\text{cis}\,(30)\,, \text{cis}\,(150)\,, \text{cis}\,(270)$$

ומי מהם הוא $\sqrt[3]{i}$? אין דרך פשוטה להגדיר זאת ולכן מה שעושים זה: או שלא מגדירים חזקות לא שלמות או שמגדירים בצורה כזאת או אחרת אבל היא יוצרת בעיות אחרות.

(ב) נעשה עוד הוכחה (נכון!) לפתרון אבל בצורה אחרת: נשתמש בכך שבמרוכבים ניתן לפרק כל פולינום $p(x)$ מדרגה n למכפלה

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

כאשר $a_1,\ldots,a_n$ הם שורשים של $p(x)$ (כלומר $p(a_1)=0, p(a_2)=0,\ldots,p(a_n)=0$). איך זה קשור אלינו?
שוב, ראינו שלמשוואה $x^n = 1$ יש n פתרונות מרוכבים

$$\text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right), \text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{n}\right), \ldots, \text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}\right)$$

כלומר אלו השורשים של הפולינום $p(x)=x^n-1$ ולכן

$$x^n-1=\left(x-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right)\right)\cdot\left(x-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{n}\right)\right)\cdot\dots\cdot\left(x-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}\right)\right)$$

ונסתכל על המקדם החופשי של פולינום זה: מה יש מצד שמאל של השיוויון (הפולינום x^n-1)

$$-1$$

מה יש בצד ימין (המכפלה)?

$$\left[-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right)\right]\left[-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{n}\right)\right]\cdots\left[-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}\right)\right]$$

(למשל $n=3$

$$\left(x-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right)\right)\cdot\left(x-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{3}\right)\right)\left(x-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 2}{3}\right)\right)=$$

$$x^3+$$

$$x^2\left(-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 2}{3}\right)-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{3}\right)-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right)\right)+$$

$$x\left(\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{3}\right)\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 2}{3}\right)+\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right)\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 2}{3}\right)+\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right)\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{3}\right)\right)+$$

$$(-1)^3\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right)\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{3}\right)\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 2}{3}\right)$$

זה חישוב ארוך באופן ישיר אבל אנחנו צריכים רק את המקדם החופשי). נחזור אלינו: קיבלנו ש

$$-1=\left[-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right)\right]\left[-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{n}\right)\right]\cdots\left[-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}\right)\right]=(-1)^n\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right)\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{n}\right)\cdots\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}\right)$$

כלומר

$$-1=(-1)^n\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right)\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{n}\right)\cdots\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}\right)$$

ולכן: אם n זוגי, נקבל

$$-1=\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right)\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{n}\right)\cdots\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}\right)$$

ואם n אי זוגי נקבל

$$-1=-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right)\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{n}\right)\cdots\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}\right)$$

ואז

$$1=\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 0}{n}\right)\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 1}{n}\right)\cdots\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}\right)$$

כמו שיצאנו לנו ממקודם.

ההערה: מהשוויון של הפולינומים הנ"ל אפשר גם להסיק שסכום שורשי היחידה מסדר n הוא 0 (כמו שראינו בתירגול קודם). מסתכלים המקדם של x^{n-1}...

2. נכון/לא נכון:

(א) למשוואה לינארית בודדת תמיד יש פתרון (ללא תלות במספר המשתנים).
תשובה: לא! למשל $0x_1 + 0x_2 = 2$.

(ב) למערכת משוואות עם 4 משוואות ו 2 נעלמים אין פתרון.
תשובה: לא! למשל

$$\begin{aligned} 0x + y &= 1 \\ 0x + y &= 1 \\ 0x + y &= 1 \\ 0x + y &= 1 \end{aligned}$$

(ג) למערכת שיש בה אינסוף פתרונות בהכרח יהיה יותר משוואות מנעלמים.
תשובה: לא! למשל

$$x + y = 0$$

יש משוואה אחת ושני נעלמים ויש אינסוף פתרונות.

(ד) למערכת שיש בה אינסוף פתרונות בהכרח יהיה יותר נעלמים ממשוואות.
תשובה: לא! למשל

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \\ 3x + 3y &= 3 \\ 4x + 4y &= 4 \end{aligned}$$

יש 4 משוואות ו 2 נעלמים ויש אינסוף פתרונות.

(ה) למערכת עם יותר נעלמים ממשוואות יהיה אינסוף פתרונות.
תשובה: לא!

$$x + y + z = 0$$
$$x + y + z = 1$$

יש שתי משוואות ו 3 נעלמים אבל אין פתרון.

(ו) למערכת משוואת מרוכבת תמיד יש פתרון.
תשובה: לא!

$$x + y + z = 0$$
$$x + y + z = 1$$

אין פתרון גם כמערכת משוואות מרוכבת.

חדוא

חשבו את הקדומות הבאות

1. $\int \frac{x^3}{x^8+1}\mathrm{dx}$

פתרון: ננסה באינטגרציה בחלקים ($\int fg' = fg - \int f'g\mathrm{dx}$)

$$\int \frac{x^3}{x^8+1}\mathrm{dx} = \int \left[x^3 \cdot \frac{1}{x^8+1}\right]\mathrm{dx} = \left[\begin{array}{cc} f = \frac{1}{x^8+1} & f' = \frac{-8x^7}{(x^8+1)^2} \\ g' = x^3 & g = \frac{x^4}{4} \end{array}\right] = \frac{1}{4}\frac{x^4}{x^8+1} - \int \frac{-8x^7}{(x^8+1)^2} \cdot \frac{x^4}{4}\mathrm{dx}$$

וזה ממש לא יפה..

ננסה בדרך אחרת: נזכר $[\arctan(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$ ונשתמש בהצבה

$$\int \frac{x^3}{x^8+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^8+1}\mathrm{dx} = \left[\begin{array}{ccc} t = x^4 & \Rightarrow & t^2 = x^8 \\ \mathrm{dt} = 4x^3\mathrm{dx} & & \mathrm{dt} = 4x^3\mathrm{dx} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{dt} = \frac{1}{4}\arctan(t) + C = \frac{1}{4}\arctan(x^4) + C$$

2. $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\mathrm{dx}$

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\mathrm{dx} = \left[\begin{array}{c} t = \ln(x) \\ \mathrm{dt} = \frac{1}{x}\mathrm{dx} \end{array}\right] = \int \cos(t)\mathrm{dt} = \sin(t) + C = \sin(\ln(x)) + C$$

3. $\int e^{\sin(x)}\sin(2x)\mathrm{dx}$

פתרון: נשתמש בהצבה ונשתמש בזהות (הידועה?) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ ונקבל

$$\int e^{\sin(x)}\sin(2x)\mathrm{dx} = \int e^{\sin(x)}2\sin(x)\cos(x)\mathrm{dx} = 2\int e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)\mathrm{dx} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = \sin(x) \\ \mathrm{dt} = \cos(x)\mathrm{dx} \end{array}\right] = 2\int e^t t\mathrm{dt}$$

נמשיך באינטגרציה בחלקים עם $\int e^t t\mathrm{dt}$:

$$\int e^t t\mathrm{dt} = \left[\begin{array}{cc} f' = e^t & f = e^t \\ g = t & g' = 1 \end{array}\right] = te^t - \int 1 \cdot e^t\mathrm{dt} = te^t - e^t + C$$

ולכן בסה"כ נקבל

$$\int e^{\sin(x)}\sin(2x)\mathrm{dx} = \left[\begin{array}{c} t = \sin(x) \\ \mathrm{dt} = \cos(x)\mathrm{dx} \end{array}\right] = 2\left[te^t - e^t\right] + C = 2\left[\sin(x)e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)}\right] + C$$

4. $\int x^3 e^{(x^2)}\mathrm{dx}$

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int x^3 e^{(x^2)}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int x^2 \cdot 2xe^{(x^2)}\mathrm{dx} = \left[\begin{array}{c} t = x^2 \\ \mathrm{dt} = 2x\mathrm{dx} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int te^t\mathrm{dt} =$$

וכמו מקודם (בסעיף הקודם שחשבנו את האינטגרל הזה) נמשיך

$$= \frac{1}{2}\left[te^t - e^t\right] + C = \frac{1}{2}\left[x^2e^{(x^2)} - e^{(x^2)}\right] + C$$

5. $\int \frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}\mathrm{dx}$

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int \frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}\mathrm{dx} = \int \frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{e^x}}{e^x}\right)}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)}\mathrm{dx} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t=\frac{1}{\sqrt{e^x}}=e^{-\frac{x}{2}} \\ \mathrm{dt}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{dx}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} t=\frac{1}{\sqrt{e^x}}=e^{-\frac{x}{2}} \\ \frac{1}{-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}}\mathrm{dt}=\mathrm{dx}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} t=\frac{1}{\sqrt{e^x}}=e^{-\frac{x}{2}} \\ \frac{1}{-\frac{1}{2}t}\mathrm{dt}=\mathrm{dx}\end{array}\right] = \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}t}\mathrm{dt} =$$

$$= -2\int \frac{1}{(1+t)}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{dt}$$

תלמדו לפתור אינטגרל זה בקלות בהמשך. ננסה כיוון אחר:

$$\int \frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}\mathrm{dx} = \left[\begin{array}{c} t=e^x \\ \mathrm{dt}=e^x\mathrm{dx}\end{array}\right] = \int \frac{1}{t+\sqrt{t}}\mathrm{dt} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} u=\sqrt{t} \\ du=\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{dt}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} u=\sqrt{t} \\ 2\sqrt{t}du=\mathrm{dt}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} u=\sqrt{t} \\ 2udu=\mathrm{dt}\end{array}\right] = \int \frac{2u}{u^2+u}du =$$

$$= \int \frac{2}{u+1}du = 2\ln|u+1|+C = 2\ln\left|\sqrt{t}+1\right|+C = 2\ln\left|\sqrt{e^x}+1\right|+C$$

6. הערה (שלא ממש קשורה לתרגילים ממקודם): שימו לב ש $\int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \ln|x|+C$ - ה $\ln$ עם ערך מוחלט! זה עוזר לחשב דברים כמו:

$$\int_{-3}^{-1}\frac{1}{x}\mathrm{dx} = \ln|-1|-\ln|-3| = -\ln 3$$