בוחן בטופולוגיה

14.4.16 ו' ניסן התשע"ו

משך הבוחן 90 דקות.

בבוחן 3 שאלות ללא בחירה. משקל כל שאלה 33 נקודות (+נקודה אחת מתנה). הנקודות מתחלקות בין סעיפים בשאלה שווה בשווה.

בנוסף יש שאלת בונוס במשקל 10 נקודות.

נמקו היטב את תשובותיכם.

1. תהי X הקבוצה של כל הסדרות הממשיות. נגדיר על X מטריקה לפי: $d(\{a_n\},\{b_n\})=0$ אם $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$ שוות. אחרת, $d(\{a_n\},\{b_n\})=\frac{1}{m}$ כאשר m הוא האינדקס המינימלי שבו $a_m\neq b_m$ (אין צורך להוכיח שזו מטריקה). נסמן ב Y את קבוצת הסדרות הקבועות.

(א) הוכיחו כי Y היא קבוצה סגורה.**פתרון:** קודם כל נבין מהו כדור פתוח ביחס למטריקה הזאת. תהי $\{a_n\}$ סדרה וניקח $m\in\mathbb{N}$. הכדור הפתוח $B(\{a_n\},\frac{1}{m})$ מכיל את כל הסדרות $\{b_n\}$ כך ש $d(\{a_n\},\{b_n\})<\frac{1}{m}$ כלומר המקום המינימלי שבו $a_k\neq b_k$ הוא אחרי m. במילים אחרות, m האיברים הראשונים של $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$ שווים. כלומר, הכדור הפתוח $B(\{a_n\},\frac{1}{m})$ מכיל את כל הסדרות ש m האיברים הראשונים שלהן שווים ל m האיברים הראשונים של $\{a_n\}$. כעת נוכיח כי Y^c פתוחה. תהי $\{a_n\}\in Y^c$ סדרה שאינה קבועה . צריך למצוא $r>0$ כך ש $B(\{a_n\},r)\subseteq Y^c$. היות ש $\{a_n\}$ אינה קבועה, יש $i,j\in\mathbb{N}$ כך ש $a_i\neq a_j$. בלי הגבלת כלליות $i>j$. נבחר $r=\frac{1}{i}$. אז הכדור הפתוח $B(\{a_n\},r)$ מכיל את כל הסדרות ש i האיברים הראשונים שלהן הם:

$$a_1,\dots,a_i$$

כלומר הוא מכיל רק סדרות שמכילות גם את a_i וגם את a_j שהם איברים שונים ולכן הכדור הפתוח $B(\{a_n\},r)$ לא מכיל אף סדרה קבועה ולכן $B(\{a_n\},r)\subseteq Y^c$ כנדרש. לכן Y סגורה.

(ב) מצאו את $\operatorname{int}Y$ ואת ∂Y.**פתרון:** נוכיח כי $\operatorname{int}Y=\emptyset$. יהי $\{a_n\}\in Y$ צריך להוכיח שלכל $r>0$ מתקיים $B(\{a_n\},r)\not\subseteq Y$. ואכן, יהי $r>0$. אז ניקח $m\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{m}<r$. לפי הניתוח מסעיף א' רואים ש $B(\{a_n\},\frac{1}{m})$ הן כל הסדרות ש m האיברים הראשונים שלהם שווים ל m האיברים הראשונים של $\{a_n\}$. אין שום מגבלה שאר האיברים ולכן הכדור $B(\{a_n\},r)$ מכיל גם סדרות

לא קבועות ולכן לא מוכל ב Y.
היות ש Y סגורה מתקיים ש $\operatorname{cl} Y = Y$ ולכן $\partial Y = \operatorname{cl} Y \setminus \operatorname{int} Y = Y \setminus \emptyset = Y$.

(ג) האם המרחב Y קשיר? (ביחס לטופלוגיית תת המרחב).**פתרון:** לא. המרחק בין כל שתי סדרות קבועות שונות הוא 1 (כי האיבר הראשון שלהם שונה) ולכן לכל $\{a_n\} \in Y$ מתקיים ש (בתוך תת המרחב Y)

$$B(\{a_n\}, \frac{1}{2}) = B[\{a_n\}, \frac{1}{2}] = \{\{a_n\}\}$$

כלומר הקבוצה $\{\{a_n\}\}$ היא גם סגורה וגם פתוחה ולכן המרחב לא קשיר.

2. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה

$$\tau = \{O_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$$

כאשר

$$O_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

(א) הוכיחו כי $(\mathbb{Z}, \tau)$ אכן מרחב טופולוגי.**פתרון:** צריך להוכיח את שלושת האקסיומות של מרחב טופולוגי.

i. איחוד של פתוחות הוא פתוח: נסתכל על איחוד $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ של פתוחות. את הקבוצות הריקות באיחוד הזה וודאי אפשר להשמיט. לכן נניח כי לכל $i \in I$ מתקיים $U_i \neq \emptyset$. אם האיחוד שווה לכל $\mathbb{Z}$ זו בוודאי קבוצה פתוחה. לכן ניתן להניח כי $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \subsetneqq \mathbb{Z}$ בפרט, אף אחת מהקבוצות הפתוחות האלה היא לא $\mathbb{Z}$. לכן אפשר להניח שלכל $i \in I$ יש n_i כך ש $U_i = O_{n_i}$. ניקח $a \in \mathbb{Z}$ כך ש $a \notin U$. נשים לב ש a חסם מלרע של U כי אם $b \in U$ עם $b < a$ אז $b \in O_{n_i}$עבור i כלשהוא ואז בוודאי $a \in O_{n_i} \subseteq U$. לכן U קבוצה של שלמים שחסומה מלרע ולכן יש לה מינימום, נסמן אותו $m = \min U$. כעת יש i כך ש

$$m \in O_{n_i}$$

נשים לב שכל איבר קטן מ m לא נמצא ב U (m מינימום כאמור). כל איבר גדול מ m כן נמצא ב U (כי הוא ב O_{n_i}) ולכן

$$U = O_m$$

שהיא קבוצה פתוחה כנדרש.

ii. חיתוך שתי קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה: נניח U ו V פתוחות. אם אחת מהן היא $\emptyset$ או $\mathbb{Z}$ הטענה מיידית. אחרת יש n, m כך ש

$$U = O_n \quad V = O_m$$

ואז ברור ש

$$U \cap V = O_{\max\{n,m\}}$$

שזו קבוצה פתוחה.

iii. $\emptyset, \mathbb{Z}$ הן קבוצות פתוחות: ברור מההגדרה.

(ב) מצאו את $\operatorname{cl} O_n$.**פתרון:** נשים לב שהקבוצות הסגורות בטופולוגיה זו הן $\emptyset, \mathbb{Z}$ ו $\{n, n-1, n-2, \dots\}$ לכל $n \in \mathbb{Z}$. קל לראות שהקבוצה הסגורה היחידה שמכילה את O_n היא $\mathbb{Z}$ ולכן $\operatorname{cl} O_n = \mathbb{Z}$.

(ג) מצאו סדרה שמתכנסת לכל איבר $n \in \mathbb{Z}$.**פתרון:** ניקח את הסדרה $a_n = n$. יהי $x \in \mathbb{Z}$, נוכיח ש $a_n \to x$. תהי U קבוצה פתוחה כך ש $x \in U$. אם $U = \mathbb{Z}$ אז בוודאי $a_n \in \mathbb{Z}$ החל מ $n = 1$. אם $U = O_m$ אז $a_n \in U$ החל מ $n = m$. נשים לב ש $U \neq \emptyset$כי $x \in U$.

3. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, תהי $A \subseteq X$ ותהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $f(\operatorname{int} A) \subseteq \operatorname{int} f(A)$**פתרון:** הפרכה: ניקח $X = A = \mathbb{R}$ ואת $f(x)$ להיות הפונקציה הקבועה $f(x) = 0$.

$$f(\operatorname{int} A) = f(\operatorname{int} \mathbb{R}) = f(\mathbb{R}) = \{0\}$$

לעומת זאת

$$\operatorname{int} f(A) = \operatorname{int} f(\mathbb{R}) = \operatorname{int}\{0\} = \emptyset$$

(ב) אם f הומאומורפיזם אז $f(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} f(A)$.**פתרון:** הוכחה: נזכור שהומאומורפיזם שולח קבוצות פתוחות לפתוחות. לכן $f(\operatorname{int} A)$ פתוחה, היות ש

$$f(\operatorname{int} A) \subseteq f(A)$$

והרי $\operatorname{int} f(A)$ היא הפתוחה הגדולה ביותר בתוך $f(A)$ מתקיים ש

$$f(\operatorname{int} A) \subseteq \operatorname{int} f(A)$$

אם נחזור על הטיעון עם הפונקציה f^{-1} (שגם היא הומאומורפיזם כמובן) ו $B = f(A)$ אז נקבל

$$f^{-1}(\operatorname{int} B) \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(B)$$

נציב את $B = f(A)$ ונקבל

$$f^{-1}(\operatorname{int} f(A)) \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(f(A))$$

נפעיל על שני האגפים את f ונקבל

$$ff^{-1}(\operatorname{int} f(A)) \subseteq f \operatorname{int} f^{-1}(f(A))$$

כעת נזכור ש f חד־חד ערכית ועל ולכן

$$ff^{-1} = f^{-1}f = 1$$

ולכן קיבלנו

$$\operatorname{int} f(A) \subseteq f(\operatorname{int} A)$$

וזה אכן הכיוון השני הדרוש.

שאלת בונוס (5 נק' לכל סעיף): יהי X מרחב טופולוגי ותהי $Y \subseteq X$ תת קבוצה. X משרה על Y טופולוגיית תת מרחב. תהי $A \subseteq Y$. נסמן ב $\mathrm{cl}_X(A)$ $\mathrm{cl}_Y(A)$ את הסגור של A ביחס לטופולוגיה של X ו Y בהתאמה. בדומה נסמן $\mathrm{int}_X(X)$ ו $\mathrm{int}_Y(A)$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- $\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap Y$**פתרון:** הוכחה: לפי הגדרה $\mathrm{cl}_X(A) \cap Y$ היא קבוצה סגורה ב Y ובוודאי $A \subseteq \mathrm{cl}_X(A) \cap Y$ ולכן לפי מינימליות של הסגור מתקיים

$$\mathrm{cl}_Y(A) \subseteq \mathrm{cl}_X(A) \cap Y$$

מצד שני, $\mathrm{cl}_Y(A) = P \cap Y$ עבור איזשהיא P סגורה ב X ולכן

$$A \subseteq \mathrm{cl}_Y(A) = P \cap Y \subseteq P$$

לפי מינימליות הסגור נקבל ש

$$\mathrm{cl}_X(A) \subseteq P$$

ולכן

$$\mathrm{cl}_X(A) \cap Y \subseteq P \cap Y = \mathrm{cl}_Y(A)$$

כנדרש.

- $\mathrm{int}_Y(A) = \mathrm{int}_X(A) \cap Y$**פתרון:** הפרכה: ניקח $X = \mathbb{R}$ את $A = Y = \mathbb{Q}$ ואז

$$\mathrm{int}_Y(A) = \mathrm{int}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

ולעומת זאת

$$\mathrm{int}_X(A) \cap Y = \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset \cap \mathbb{Q} = \emptyset$$