1. הוכיחו כי לכל $0 < a < b$ מתקיים $\frac{\mathrm{b-a}}{1+\mathrm{b}} < \ln\left(\frac{1+\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}}\right) < \frac{\mathrm{b-a}}{1+\mathrm{a}}$.

ראשית נשים לב כי אי-השוויון שקול לאי-השוויון הבא לכל $0 < a < b$:

$$\frac{1}{1+b} < \frac{ln(1+b) - ln(1+a)}{b-a} < \frac{1}{1+a}$$

נגדיר $f(x) = ln(1+x)$. היא רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) ולכן לפי לגרנז' יש $a < c < b$ כך ש-

$$f'(c) = \frac{ln(1+b) - ln(1+a)}{b-a}$$

כלומר

$$\frac{1}{1+c} = \frac{ln(1+b) - ln(1+a)}{b-a}$$

לכן אי-השוויון שצריך להוכיח שקול ל-

$$\frac{1}{1+b} < \frac{1}{1+c} < \frac{1}{1+a}$$

וזה נכון כיוון ש-$a < c < b$.

2. הוכיחו כי לכל $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $tan(x) \geq x$

נגדיר $f(x) = tan(x)$. יהי $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (עבור $x = 0$ אי-השוויון הדרוש נכון לפי הצבה). אז $f(x)$ רציפה בקטע $[0,x]$ וגזירה בקטע $(0,x)$ ולכן לפי לגרנז' יש $0 < c < x$ כך ש-

$$\frac{1}{cos^2(c)} = \frac{tan(x) - tan(0)}{x-0} = \frac{tan(x)}{x}$$

כיוון ש-$0 < c < \frac{\pi}{2}$ אז $0 < cos(c) < 1$ ולכן $\frac{1}{cos^2(c)} > 1$ כלומר $\frac{tan(x)}{x} > 1$ כלומר $tan(x) > x$. לסיכום לכל $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $tan(x) \geq x$ כדרוש.

3. תהי $f(x)$ גזירה בכל הישר הממשי ומקיימת $f(1) = 0$, וכן $f'(x) \neq 0$ לכל $x \in (0,1)$. הוכיחו כי קיימת $c \in (0,1)$ כך ש-$c = \frac{-f(c)}{f'(c)}$

נגדיר $g(x) = xf(x)$. היא גזירה בכל הישר הממשי כמכפלה של גזירות ולכן גם ודאי רציפה בכל הישר הממשי. מתקיים

$$g(0) = 0 \cdot f(0) = 0$$

$$g(1) = 1 \cdot f(1) = 1 \cdot 0 = 0$$

לכן לפי משפט רול קיימת $0 < c < 1$ כך ש-$g'(c) = 0$. אך לפי נוסחת גזירה של מכפלה:

$$g'(x) = f(x) + xf'(x)$$

כלומר $f(c) + cf'(c) = 0$ כלומר $c = \frac{-f(c)}{f'(c)}$ כדרוש. (יכלנו לחלק ב-$f'(c)$ כי נתון $f'(x) \neq 0$ לכל $0 < x < 1$).

4. הוכיחו כי למשוואה $2x = cos(x)$ יש פתרון יחיד

נגדיר $f(x) = 2x - cos(x)$. היא גזירה ורציפה בכל הישר הממשי. מתקיים $f'(x) = 2 + sin(x) \neq 0$ לכן לפי מסקנה ממשפט רול הפונקציה $f(x)$ מתאפסת לכל היותר פעם אחת כלומר למשוואה הנתונה יש לכל היותר פתרון אחד. נותר להראות שקיים לה פתרון.

מתקיים

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(20) = 40 - cos(20) \geq 39 > 0$$

ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $0 < c < 20$ כך ש-$f(c) = 0$. לכן סה"כ למשוואה הנתונה יש בדיוק פתרון אחד.

5. מיצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $x^4+x^2=2$ בקטע $[0,2]$

נגדיר $f(x)=x^4+x^2-2$, היא גזירה ורציפה בכל הישר הממשי ולכן בפרט היא רציפה ב-$[0,2]$ וגזירה ב-$(0,2)$.

מתקיים $f'(x)=4x^3+2x=x(4x^2+2)$, לכן $f'(x)$ מתאפסת רק ב-$x=0$. לפי מסקנה ממשפט רול מקבלים כי $f(x)$ מתאפסת לכל היותר בשתי נקודות. מצד שני $f(1)=0$, f(-1) = 0, כלומר גם קיימים לפחות שני פתרונות. סה"כ קיבלנו כי קיימים בדיוק שני פתרונות.

6. מיצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $e^x=10x$ בקטע $[0,10]$

נגדיר $f(x)=e^x-10x$. היא גזירה ורציפה בכל הישר הממשי ולכן בפרט רציפה ב-$[0,10]$ וגזירה ב-$(0,10)$.

מתקיים $f'(x)=e^x-10$ כלומר $f'(x)$ מתאפסת ב-$x=ln(10)$ (שאכן נמצא בקטע הנתון). כלומר $f'(x)$ מתאפסת רק פעם אחת בקטע הנתון ולכן לפי מסקנה ממשפט רול, $f(x)$ מתאפסת לכל היותר פעמיים בקטע הנתון.

מתקיים

$$f(0)=1$$

$$f(1)=e-10<0$$

ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $0<c<1$ כך ש-$f(c)=0$. כמו כן מתקיים

$$f(7)=e^7-70>2^7-70=128-70=58>0$$

ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $1<c'<7$ כך ש-$f(c')=0$. נשים לב כי $c\neq c'$. לכן הראנו שקיימים לפחות שני פתרונות, וכן כי קיימים לכל היותר שני פתרונות, ולכן קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה הנתונה בקטע הנתון.

7. תהי $f(x)=ln^2(x)-5ln(x)+6$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[e^2,e^3]$ כך ש-$f'(c)=0$

מתקיים

$$f(e^2)=0, f(e^3)=0$$

כמו כן $f(x)$ גזירה לכל $x>0$ ולכן רציפה ב-$[e^2,e^3]$ וגזירה ב-(e^2,e^3). לכן לפי משפט רול קיימת $e^2<c<e^3$ כך ש-$f'(c)=0$.

8. הוכיחו כי לכל $0<y<x$, $\alpha>1$ מתקיים $\alpha y^{\alpha-1}(x-y)<x^\alpha-y^\alpha<\alpha x^{\alpha-1}(x-y)$

אי-השוויון שקול ל-

$$\alpha y^{\alpha-1}<\frac{x^\alpha-y^\alpha}{x-y}<\alpha x^{\alpha-1}$$

נגדיר $f(x)=x^\alpha$. יהיו $0<y<x$. הפונקציה גזירה בכל הישר הממשי ובפרט רציפה בקטע $[y,x]$ וגזירה בקטע (y,x). לכן לפי משפט לגרנז' יש $y<c<x$ כך ש-$f'(c)=\frac{x^\alpha-y^\alpha}{x-y}$ כלומר $\alpha c^{\alpha-1}=\frac{x^\alpha-y^\alpha}{x-y}$.

לכן אי-השוויון שקול ל-

$$\alpha y^{\alpha-1}<\alpha c^{\alpha-1}<\alpha x^{\alpha-1}$$

כיוון ש-$\alpha>1$ הפונקציה $g(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ היא פונקציה עולה ולכן כיוון ש-$y<c<x$ אז אי-השוויון הדרוש אכן מתקיים.

9. הוכיחו שלכל $0<a<b$ מתקיים $arctan(b)-arctan(a)\leq b-a$

נגדיר $f(x)=arctan(x)$. היא רציפה וגזירה בכל הממשיים, בפרט רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b). לפי משפט לגרנז' יש $a<c<b$ כך ש-
$f'(c)=\frac{arctan(b)-arctan(a)}{b-a}$

כלומר $\frac{arctan(b)-arctan(a)}{b-a}=\frac{1}{1+c^2}$ ולכן

$$\frac{arctan(b)-arctan(a)}{b-a}<1$$

ולכן (הרי נתון $b-a>0$):

$$arctan(b)-arctan(a)<b-a$$

כדרוש.

10. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בכל הישר הממשי. נגדיר $g(x)=f(x)+f(6-x)$. הוכיחו כי קיים x_0 כך ש-$g'(x_0)=0$

מתקיים

$$g(0)=f(0)+f(6)$$

$$g(6)=f(6)+f(0)$$

כלומר $g(6)=g(0)$. הפונקציה $g(x)$ גם גזירה בכל הישר הממשי כי היא הרכבה וסכום של פונקציות גזירות. לכן לפרט היא רציפה ב-[0,6] וגזירה ב-(0,6). לכן לפי משפט רול קיים $0<x_0<6$ כך ש-$g'(x_0)=0$.

11. הוכיחו כי $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{15}<arcsin(0.6)<\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}$

ראשית נשים לב כי $arcsin(0.5)=\frac{\pi}{6}$ כלומר מה שמנסים להוכיח שקול ל-

$$\frac{\sqrt{3}}{15}<arcsin(0.6)-arcsin(0.5)<\frac{1}{8}$$

כלומר שקול ל-

$$\frac{10\sqrt{3}}{15}<\frac{arcsin(0.6)-arcsin(0.5)}{0.6\text{-}0.5}<\frac{10}{8}$$

נגדיר $f(x)=arcsin(x)$. היא גזירה לכל $-1<x<1$ ובפרט היא רציפה ב-[0.5,0.6] וגזירה ב-(0.5,0.6). לכן לפי משפט לגרנז' יש $0.5<c<0.6$ כך ש-$\mathrm{f'(c)}=\frac{arcsin(0.6)-arcsin(0.5)}{0.6\text{-}0.5}$ כלומר כך ש-

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{arcsin(0.6)-arcsin(0.5)}{0.6\text{-}0.5}$$

כלומר נשאר להראות כי

$$\frac{10\sqrt{3}}{15}<\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}<\frac{10}{8}$$

אך זה נכון כי $\frac{1}{2}<c<\frac{3}{5}$ לכן $\frac{9}{25}<c^2<\frac{1}{4}$ לכן $\frac{16}{25}<1-c^2<\frac{3}{4}$ לכן $\frac{4}{5}<\sqrt{1-c^2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ ולכן $\frac{5}{4}<\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}<\frac{2}{\sqrt{3}}$ כדרוש.

12. הוכיחו כי $\frac{sin(x)}{x}<cos(x)$ בקטע $(0,\pi)$

נגדיר $f(x)=sin(x)$. יהי $x\in(0,\pi)$. אז $f(x)$ רציפה ב-$[0,x]$ וגזירה ב-$(0,x)$ ולכן לפי משפט לגרנז' יש $0<c<x$ כך ש-

$$cos(c)=\frac{sin(x)-sin(0)}{x-0}=\frac{sin(x)}{x}$$

לכן נשאר להראות כי $cos(x)<cos(c)$ אך זה נכון כי $c<x$ והפונקציה $y=cos(x)$ היא יורדת בקטע $(0,\pi)$ (כי נגזרתה שלילית שם).

13. תהי $f(x)$ רציפה ב-[0,3] וגזירה פעמיים ב-(0,3) בעלת נגזרת שניה רציפה. נתון $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ וכן $f(2)=5, f(3)=8$.
הוכיחו שקיים $c\in[0,3]$ כך ש-$f''(c)=1$.

נתון $f(2)=5, f(3)=8$ ולכן לפי משפט לגרנז' בקטע [2,3] (הרי $f(x)$ רציפה בקטע זה וגזירה ב-(2,3)) יש $2<d<3$ כך ש-

$$f'(d)=\frac{8-5}{3-2}=3$$

נתון $f'(0)=0$, וראינו $f'(d)=3$, לכן לפי משפט לגרנז' בקטע $[0,d]$ (הרי f' רציפה בקטע זה וגזירה ב-$(0,d)$, כי נתון ש-f בעלת נגזרת שניה לכן בפרט f' גזירה ובפרט f' רציפה) יש $0<\mathrm{a}<d$ כך ש-

$$f''(\mathrm{a})=\frac{3-0}{d-0}=\frac{3}{d}>1$$

המעבר $1 < \frac{3}{d}$ כי $d < 3$.

לסיום נתון כי $f''(0) = 0 < 1$ והראנו $f''(\mathrm{a}) > 1$ לכן לפי משפט ערך הביניים בקטע $[0, \mathrm{a}]$ (והרי $f''(x)$ רציפה בקטע זה - נתון) יש $0 < \mathrm{c} < \mathrm{a}$ כך ש-

$$f''(c) = 0$$

כדרוש.

(דרך אגב: משפט דרבו אומר כי למרות שלא כל נגזרת היא רציפה (אל תתבלבלו עם העובדה כי כל פונקציה גזירה היא בעצמה רציפה), כל נגזרת דווקא כן מקיימת את תכונת ערך הביניים – כלומר, כל נגזרת מקבלת כל ערך בין ערכיה בקצוות קטע. לכן אם היינו לומדים את משפט דרבו היה אפשר להוריד מהתרגיל את הנתון ש-f'' רציפה.)

14. הוכיחו שהפונקציה הבאה גזירה בכל הממשיים, וחשבו את נגזרתה:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

לכל $x \neq 0$ הנגזרת היא לפי נגזרת של מכפלה וכלל השרשרת: $2x \cdot sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \cdot cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{-2x}{x^4}$

בנקודה $x = 0$ נחשב לפי הגדרה:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{\mathrm{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 sin\left(\frac{1}{h^2}\right)}{\mathrm{h}} = \lim_{h \to 0} h \cdot sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

(פונקציה שואפת לאפס כפול פונקציה חסומה).

לסיכום,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{2}{\mathrm{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

15. האם הפונקציה הבאה רציפה? האם היא גזירה?

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x < 1 \\ 4x, & x \geq 1 \end{cases}$$

לכל $x < 1$ ולכל $x > 1$ הפונקציה היא רציפה כי היא מזדהה שם בקטע פתוח סביב x עם פונקציה רציפה.

בנקודה $x = 1$ הפונקציה היא גם כן רציפה כי

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 4\mathrm{x} = 4$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 4 = 4$$

כלומר $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 4$.

כלומר לסיכום הפונקציה היא רציפה (כלומר רציפה בכל הממשיים).

מצד שני הפונקציה היא לא גזירה בכל הממשיים, כי היא איננה גזירה ב-$x = 1$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(1+h) - 4}{h} = \lim_{h \to 0} 4 = 4$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{4\text{-}4}{h} = \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

הגבולות החד-צדדיים שונים לכן הגבול לא קיים.

16. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה. האם הפונקציה הבאה רציפה? האם היא גזירה?

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)sin^2(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

נתחיל מרציפות. לכל $x \neq 0$ הפונקציה $g(x)$ היא רציפה כי היא מזדהה שם בקטע פתוח סביב x עם הפונקציה הרציפה $y = \frac{f(x)sin^2(x)}{x}$, אשר רציפה לפי מכפלה ומנה של פונקציות רציפות. בנקודה $x = 0$:

$$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \frac{f(x)sin^2(x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{sin(x)}{x} \lim_{x\to0} f(x) \lim_{x\to0} sin(x) = 1 \cdot f(0) \cdot 0 = 0$$

כלומר $\lim_{x\to0} f(x) = 0 = g(0)$ ולכן $g(x)$ רציפה גם ב-$x = 0$ ולסיכום $g(x)$ רציפה בכל הישר הממשי.

כעת גזירות: לכל $x \neq 0$ לא ניתן לומר דבר, כלומר ייתכן כי $g(x)$ גזירה וייתכן שלא, כי לא נתון לנו דבר על הגזירות של $f(x)$.

מצד שני, ב-$x = 0$ הפונקציה $g(x)$ בהכרח כן גזירה:

$$\lim_{h\to0} \frac{\mathrm{g}(0+h) - \mathrm{g}(0)}{\mathrm{h}} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{f(h)sin^2(h)}{h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \left(\frac{sin(h)}{\mathrm{h}}\right)^2 \lim_{h\to0} f(h) = 1^2 f(0) = f(0)$$

כלומר $g'(0) = f(0)$.