פתרון מבחן מועד א' – אנליזה מתקדמת ומד"ר – 12/07/19

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. תהי
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5+y^4}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א. קבעו האם $f(x,y)$ רציפה בנקודה $(0,0)$.

$$0\le\frac{|x^5+y^4|}{x^4+y^2}\le\frac{|x^5|}{x^4+y^2}+\frac{y^4}{x^4+y^2}\le|x|+y^2\to 0$$

הפונקציה אכן רציפה ב$(0,0)$

ב. חשבו את הנגזרות החלקיות $f_x(0,0),\ f_y(0,0)$.

2. תהי $f(x,y)=2x^2y-y^2+x^4+8x$

א. מצאו את הנקודות החשודות של f וקבעו האם הן מינ/מקס מקומי או אוכף.

נמצאו את הנקודות בהן הגרדיאנט מתאפס:

$$f_x = 0$$

$$f_y = 0$$

במקרה שלנו

$$f_x = 4xy + 4x^3 + 8 = 0$$

$$f_y = 2x^2 - 2y = 0$$

נבודד את y מהמשוואה השנייה ונציב במשוואה העליונה

$$8x^3 = -8$$

$$x = -1$$

$$y = 1$$

נחשב את Δ

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$f_{xx} = 4y + 12x^2$$

$$f_{yy} = -2$$

$$f_{xy} = 4x$$

$$\Delta(-1,1) = 16 \cdot (-2) - f_{xy}^2(-1,1) < 0$$

לכן מדובר בנקודת אוכף.

ב. מצאו וקטור כך שהנגזרת של f בכיוונו בנקודה $(0,1)$ מקסימלית.

$$\nabla f(0,1) = \left(f_x(0,1), f_y(0,1)\right) = (8,-2)$$

הנגזרת כמובן מקסימלית בכיוון הגרדיאנט, כלומר בכיוון $(8,-2)$.

3. מצאו פתרון למד"ר $e^y dy - xdx = 0$ המקיים $y(0) = 0$.

זו מד"ר פרידה מופרדת כבר

$$e^y dy = xdx$$

$$\int e^y dy = \int xdx + C$$

$$e^y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

נציב תנאי התחלה

$$y(0) = \ln(0 + C)$$

$$C = 1$$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$$

4. מצאו פתרון למד"ר $\left(y^2-e^x\right)dx+2xydy=0$ המקיים $y(1)=\sqrt{e}$.

נבדוק אם היא מדוייקת

$$2y=2y$$

$$U=\int 2xydy=xy^2+C(x)$$

$$U_x=y^2+C'(x)=y^2-e^x$$

$$C(x)=-e^x$$

$$U=xy^2-e^x=C$$

נציב תנאי התחלה

$$1\cdot e-e=C$$

לכן $C=0$ נחלץ את הפונקציה

$$y=\sqrt{\frac{e^x}{x}}$$

בחרנו את הפלוס שורש, בזכות תנאי ההתחלה.

5. מצאו פתרון למד"ר $xy''-(x+2)y=0$ המקיים $y(0)=0$, ו $y'(0)=1$, הביעו את הפתרון באמצעות פונקציות אלמנטריות.

סדר שני, מקדמים לא קבועים, טיילור.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$xy=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1}=\begin{Bmatrix} n+1=k \\ n=k-1 \end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k$$

$$xy''=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_n x^{n-1}=\begin{Bmatrix} n-1=k \\ n=k+1 \end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)a_{k+1}x^k$$

נציב את הטורים במד"ר:

$$\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)a_{k+1}x^k-\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k-2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

נוציא את האיבר הראשון של הטור האחרון

$$-2a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[n(n+1)a_{n+1}-a_{n-1}-2a_n]x^n=0$$

לכן $a_0=0$ שימו לב, זה מסתדר עם תנאי ההתחלה.

לכל $n\geq 1$

$$a_{n+1}=\frac{a_{n-1}+2a_n}{n(n+1)}$$

כעת

$$y'(0)=a_1=1$$

נציב בנוסחאת הנסיגה וננסה להבין מי היא הסדרה

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{6}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}$$

אפשר להראות ע"י הצבה שלכל $n \geq 1$ מתקיים כי $a_n = \frac{1}{(n-1)!}$

ולכן הטור שלנו הוא

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x$$