מתמטיקה בדידה 2 להנדסה 83-118
דף נוסחאות למבחן תש"ף

תמורות וצירופים: בחירת k עצמים מתוך n עצמים

בחירות	עם חזרה	ללא חזרה
תמורות (עם חשיבות לסדר)	n^k סדרות באורך k	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ סדרות באורך k של איברים שונים
צירופים (בלי חשיבות לסדר)	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}$ (תת־)רב־קבוצות בגודל k	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$ תת־קבוצות בגודל k

זהות פסקל: נוסחת נסיגה למקדמים בינומיים.
עבור $0 < k < n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

ומקרי הבסיס $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

משפט הבינום: עבור $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

מקדם מולטינומי: עבור $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}_0$, כאשר $n = a_1 + \cdots + a_n$

$$\binom{n}{a_1, \ldots, a_r} := \frac{n!}{a_1! \cdots a_r!}$$

נוסחת נסיגה למקדמים מולטינומיים:

$$\binom{n}{a_1, \ldots, a_r} = \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_r}$$

משפט המולטינום:

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}_0 \\ a_1 + \cdots + a_r = n}} \binom{n}{a_1, \ldots, a_r} x_1^{a_1} \ldots x_r^{a_r}$$

עצרת יורדת מוכללת:

$$\alpha^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) = \prod_{i \in [k]} (\alpha - i + 1)$$
$$= \alpha \cdot (\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)$$

עצרת עולה מוכללת:

$$\alpha^{\overline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha + i) = \prod_{i \in [k]} (\alpha + i - 1)$$

מעבר בין עצרות:

$$\alpha^{\underline{k}} = (\alpha - k + 1)^{\overline{k}}$$
$$\alpha^{\overline{k}} = (\alpha + k - 1)^{\underline{k}}$$
$$(-\alpha)^{\overline{k}} = (-1)^k \alpha^{\underline{k}}$$

מקדם בינומי מוכלל:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha - i}{k - i}$$
$$= \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}$$

זהויות מקדם בינומי מוכלל:

$$\binom{\alpha}{0} := 1$$
$$\left(\!\!\binom{\alpha}{k}\!\!\right) := \frac{\alpha^{\overline{k}}}{k!} = \binom{\alpha+k-1}{k}$$
$$\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k \left(\!\!\binom{\alpha}{k}\!\!\right)$$
$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k}$$

משפט הבינום המוכלל: עבור $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k$$

הילוכי סריג: יהי S_1 המאורע שמועמד א' הוביל לאורך כל הספירה, יהי S_2 המאורע שמועמד א' קיבל p קולות ומועמד ב' קיבל q קולות ויהי S_3 המאורע שמועמד א' הוביל או היה בתיקו לאורך כל הספירה. אז

$$\Pr(S_1|S_2) = \frac{p-q}{p+q}$$
$$\Pr(S_3|S_2) = \frac{p+1-q}{p+1}$$

מספרי קטלן: בעיית הקלפי עם $p=n+1, q=n$.

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

ונוסחת נסיגה שבה $C_0 = 1$ ולכל $n \geq 0$ מתקיים

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

הפונקצייה היוצרת היא

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} C_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

פונקציות יוצרות: יהיו הפונקציות היוצרות

$$a(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \qquad b(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$$

אז

$$[x^n](a(x)+b(x)) = a_n + b_n$$
$$[x^n](a(x)b(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
$$[x^n](a(x)^r) = \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} a_{i_1}\cdots a_{i_r}$$

הנגזרת והאינטגרל של $a(x)$ הם

$$\frac{d}{dx}a(x) = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$$
$$\int_0^x a(x)dx = \sum_{n\geq 1}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$$

כמה דוגמאות

$$\frac{1}{(1-x)^t} = \sum_{n\geq 0}\binom{n+t-1}{n}x^n$$
$$\frac{d^t}{dx^t}\frac{1}{1-x} = \frac{t!}{(1-x)^{t+1}}$$
$$e^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$$

נוסחאות נסיגה: יהי $k \in \mathbb{N}_0$ וקבועים $c_1,\ldots,c_k$ בשדה. סדרה $\underline{a} = a_0, a_1, a_2, \ldots$ המקיימת

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$$

לכל $n \geq k$ נקראת נחל"ה עמ"ק. הפולינום האופייני והפולינום הנלווה לאופייני שלה הם

$$c(x) = 1 - \sum_{i=1}^{k} c_i x^i$$
$$c^*(x) = x^k - \sum_{i=0}^{k-1} c_{k-i}x^i$$

פיתוח לשברים חלקיים לשורשים שונים: תהי $R(x) = \frac{f(x)}{c(x)}$ פונקציה רציונלית כאשר $\deg f(x) \leq k$ והפירוק של $c(x)$ הוא

$$c(x) = c_0(1-\rho_1 x)\ldots(1-\rho_k x)$$

אז המקדם של x^n ב-$R(x)$ עם קבועים d_i הם

$$[x^n]R(x) = \sum_{i=1}^{k} d_i \rho_i^n$$
$$d_i = \frac{-\rho_i f(1/\rho_i)}{c'(1/\rho_i)}$$

עקרון ההכלה וההדחה: תהינה $A_1, \dots, A_n$ קבוצות סופיות המוכלות בקבוצה U. אז

$$\forall J \subseteq [n], \qquad A_J := \bigcap_{j \in J} A_j,$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ J \neq \varnothing}} (-1)^{|J|-1} |A_J|$$

נסמן $\overline{A}_i := U \setminus A_i$ לכל $i \in [n]$. אז

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right| = \sum_{J \subseteq [n]} (-1)^{|J|} |A_J|$$

אוסף תת־קבוצות מגודל קבוע: תהי S קבוצה. אז

$$\binom{S}{k} := \{T \subseteq S \,:\, |T| = k\}$$

הכללת עקרון ההכלה וההדחה: יהי e_i מספר האיברים ב-U השייכים בדיוק ל-i מבין הקבוצות $A_1, \dots, A_n$. נגדיר $s_0 := |U|$ ולכל $1 \leq k \leq n$ נגדיר

$$s_k := \sum_{J \in \binom{[n]}{k}} |A_J|$$

אז ההכללה היא

$$e_i = \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} s_k$$

תורת הגרפים: יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט. אז

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\,|E|$$

נוסחת אוילר: אם G קשיר ומישורי, אז

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

נוסחת קיילי: מספר העצים המתוייגים מסדר n הוא n^{n-2}.