אינווריאנטיות תחת החלפת קואורדינטות

תרגיל

יהי $\{e_1, e_2\}$ בסיס אורתונורמלי עבור $\mathbb{R}^2$, ויהי u שדה סקלרי הנתון בקואורדינטות (x, y) ע"י הנוסחה $f(x, y) = x^2$ [$(x, y) = xe_1 + ye_2$]. נבנה בסיס א"נ נוסף $\{e'_1, e'_2\}$ ע"י סיבוב הבסיס $\{e_1, e_2\}$ ב-$30°$ נגד כיוון השעון, ונקבל מערכת קואורדינטות חדשה (x', y')

א) מצא נוסחת מעבר בין $\{e_1, e_2\}$ ל-$\{e'_1, e'_2\}$.

ב) מצא את השדה הסקלרי u כפונקציה של הקואורדינטות (x', y').

ג) חשב את הגראדיאנט $\mathrm{grad}\,(u)$ בקואורדינטות (x, y) וגם (x', y'), וקשר בין התוצאות.

ד) חשב את הלפלסיאן של u בשתי המערכות.

פתרון

א) ידוע מטריגו:

$$e'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \qquad e'_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$$

נגדיר $U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. בעזרת U ניתן לעבור בין הקואורדינטות ע"י

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U^t \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

ב) $u = f(x, y) = x^2$. מהסעיף הקודם:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$$

$$\Rightarrow u = x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 =: g(x', y')$$

ג) במערכת (x, y):

$$\operatorname{grad}(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla f(x, y)$$

ובמערכת (x', y'):

$$\nabla' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y'} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad}(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{2} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{1}{2}y'\right) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \\ \cancel{2} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{1}{2}y'\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{\cancel{2}}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{1}{2}y'\right) \\ -\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{1}{2}y'\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x \\ -x \end{pmatrix} = \nabla' g(x', y')$$

מתקיים:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla' g(x', y') = U \cdot \nabla f(x, y)}$$

ד) בצירים (x, y):

$$\Delta = \operatorname{div}(\operatorname{grad})$$

$$\Delta u = \underbrace{\nabla \cdot \underbrace{\nabla \cdot u}_{\text{grad}}}_{\text{div(grad}u)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + 0 = \boxed{2}$$

ובצירים (x', y'):

$$\Delta u = \frac{\partial^2 g}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y'^2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + -1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{2}$$

הלפלסיאן לא השתנה במעבר בין הקואורדינטות!

תבניות דיפרנציאליות - "אל תסתכל באינטגרל, אלא במה שיש בתוכו"

נשים לב, שלא עושים אינטגרל לפונקציה($\int f\left(x\right)$), אלא לתבנית דיפרנציאלית($\int f\left(x\right)\,\mathrm{d}x$).

במקרה של אינטגרל חד מימדי - למשל $\int_0^3 x^3\,\mathrm{d}x$ - קוראים לזה <u>1-תבנית דיפרנציאלית</u>.

במקרה של אינטגרל דו מימדי - למשל $\int_1^2\int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ - קוראים לזה <u>2-תבנית דיפרנציאלית</u>.

במקרה של אינטגרל תלת מימדי - למשל $\int_{-1}^1\int_0^2\int_3^4 x^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ - קוראים לזה <u>3-תבנית דיפרנציאלית</u>.

הגדרה

(אנו נגדיר ב$\mathbb{R}^3$, אבל ניתן להגדיר בכל מרחב וקטורי)

- 0-תבנית דיפרנציאלית ב$\mathbb{R}^3$ זו פונקציה סקלרית $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.
- 1-תבנית דיפרנציאלית ב$\mathbb{R}^3$ זה צירוף לינארי פורמלי של $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$, ביטויים מהצורה

  $$P\left(x,y,z\right)\,\mathrm{d}x+Q\left(x,y,z\right)\,\mathrm{d}y+R\left(x,y,z\right)\,\mathrm{d}z$$

  למשל, $\omega=x^2\,\mathrm{d}x+\sin\left(z\right)\,\mathrm{d}y+3\,\mathrm{d}z$ - זו 1-תבנית דיפרנציאלית.
- 2-תבנית דיפרנציאלית ב$\mathbb{R}^3$ זה צירוף לינארי פורמלי של $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$(האופרטור "$\wedge$" נקרא wedge)

  דוגמה: $$\omega=x\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+0\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$
- 3-תבנית דיפרנציאלית ב$\mathbb{R}^3$ זה ביטוי מהצורה $F\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ כאשר F פונקציה.

ניתן להגדיר חיבור בקלות:

$$\left(x^2\,\mathrm{d}x+\sin\left(z\right)\,\mathrm{d}y+e^x\,\mathrm{d}z\right)+\left(6y\,\mathrm{d}x-3\,\mathrm{d}y\right)=$$

$$=\left(x^2+6y\right)\,\mathrm{d}x+\left(\sin\left(z\right)-3\right)\,\mathrm{d}y+e^x\,\mathrm{d}z$$

ולהכפיל ב0-תבנית דיפרנציאלית:

$$e^{xy}\cdot\left(6y\,\mathrm{d}x-3\,\mathrm{d}y\right)=e^{xy}\cdot 6y\,\mathrm{d}x-3e^{xy}\,\mathrm{d}y$$