

## אלגברה לינארית 2 (88113) – בחינת סיום (מועד ב')

**מרצים:** פרופ' רון עדין, פרופ' בוריס קוניאבסקי.  
**מתרגלים:** עופר בוסאני, שירה גילת, עדי לוגסי, תמר נחשוני.

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.  
בבחינה שני פרקים. יש לענות על כל השאלות בפרק א' ועל שתיים מתוך שלוש השאלות בפרק ב'.  
הניקוד על השאלות רשום בנפרד בכל פרק. נא לציין במפורש על אילו שאלות עניתם בפרק ב'.  
נא לענות על כל שאלה בעמוד נפרד. ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".  
נא להסביר ולנמק בבירור את כל התשובות.

*בהצלחה!*

### פרק א'

יש לענות על שתי השאלות. הניקוד על כל שאלה הוא 20 נקודות.

1. יהי  $V$  מרחב המטריצות המרוכבות מסדר  $2 \times 2$  (כמרחב וקטורי מעל  $\mathbb{C}$ ).  
א. נגדיר

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(AB^*) \quad (\forall A, B \in V)$$

הוכיחו ש- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  מכפלה פנימית על  $V$ .

ב. יהיו:  $W_1 =$  מרחב המטריצות האלכסוניות ב- $V$ ,  $W_2 =$  מרחב המטריצות ב- $V$  בעלות

עקבה אפס. מצאו בסיסים אורתונורמליים עבור  $W_2, W_1, V$ .

ג. עבור  $W_2, W_1$  מסעיף ב' מצאו את המשלימים הניצבים  $W_3 := W_1^\perp, W_4 := W_2^\perp$ , ומצאו עבורם בסיסים אורתונורמליים.

ד. תהי  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 3 \end{pmatrix} \in V$ . מצאו את ההטלה הניצבת של  $A$  על כל אחד מ- $W_2, W_1, W_4, W_3$ .

2. יהי  $V$  כמו בשאלה 1א. נגדיר אופרטור לינארי  $T: V \rightarrow V$  ע"י

$$T(A) := A + iA^t \quad (\forall A \in V)$$

א. בחרו בסיס אורתונורמלי עבור  $V$ , ורשמו את המטריצה המייצגת את  $T$  בבסיס זה.

ב. מצאו את האופרטור הצמוד  $T^*$  (רשמו נוסחה מפורשת עבור  $T^*(A)$ ).

ג. האם  $T$  נורמלי? הרמיטי (צמוד לעצמו)? אנטי-הרמיטי (אנטי-צמוד לעצמו)? אוניטרי?

ד. מצאו את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של  $T$ .

ה. האם  $T$  ניתן לשילוש? האם הוא ניתן ללכסון?

ו. האם  $T$  ניתן לשילוש אוניטרי? האם הוא ניתן ללכסון אוניטרי?

**פרק ב'**

יש לענות על שתיים מתוך שלוש השאלות. הניקוד על כל שאלה הוא 30 נקודות.

3. הוכיחו, או תנו דוגמא נגדית, לכל אחד מהסעיפים הבאים.  
 א. אם הפולינום המינימלי של מטריצה  $A$  הוא  $x^3 - x$ , אז הפולינום המינימלי של  $A^2$  הוא  $x^2 - x$ .  
 ב. אם  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  מקיימת

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אז  $\det(A) = -1$ .

- ג. אם  $A$  מטריצה ממטית כך ש- $A^2$  ניתנת ללכסון מעל  $\mathbb{R}$ , אז  $A$  ניתנת ללכסון מעל  $\mathbb{R}$ .

4. יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  פרמטרים. נגדיר אופרטור  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  ע"י  
 $T(x, y, z, t) = (-2x + ay, -2y + bz - bt, 3z, 3t) \quad (\forall x, y, z, t \in \mathbb{R})$   
 א. רשמו את המטריצה  $A$  המייצגת את  $T$  לפי הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}^4$ .  
 ב. עבור אילו ערכים של  $a, b$  האופרטור  $T$  ניתן ללכסון?  
 ג. עבור כל ערך של הזוג  $(a, b)$  שעבורו  $T$  ניתן ללכסון, מצאו מטריצה הפיכה  $P$  ומטריצה אלכסונית  $D$  כך ש- $P^{-1}AP = D$ .

5. יהי  $V = \mathbb{C}^3$ , עם המכפלה הסקלרית הרגילה.  
 א. מצאו בסיס אורתונורמלי עבור

$$W = \text{span} \{ (1, i, 1+i), (i, 1, 0) \} \subseteq V$$

- ב. השלימו את הבסיס מסעיף א' לבסיס אורתונורמלי של  $V$ . בדקו את תשובתכם.  
 ג. מצאו את הווקטור ב- $W$  הקרוב ביותר לווקטור  $v = (0, 1, -1) \in V$ .