

מבנים אלגבריים למדעי המחשב (214 – 89)

מבחן מסכם, מועד א' סמסטר א' תשע"ו

מרצה: מיכאל משה שיין.
משך הבחינה: שלוש שעות. כל חומר עזר אסור.
יש לענות על ארבע שאלות ולסמן בתחילת המחברת על איזה שאלות החלטת לענות. אחרת ארבעה הפתרונות הראשונים המופיעים במחברת יבדקו. יש לנמק את כל הטענות שלך.
בהצלחה!

1. (א) תהי G חבורה אבלית סופית, ויהיו $a, b \in G$ שני איברים שמקיימים $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$. הוכח כי

$$o(a * b) = \text{lcm}(o(a), o(b)).$$

(ב) תהי G חבורה אבלית כלשהי, ותהי $T \subseteq G$ הקבוצה של כל האיברים של G מסדר סופי. הוכח כי T הינה תת-חבורה של G .

2. (א) מייך את החבורות האבליות מסדר 144. כלומר, הצג רשימה של חבורות כך שכל חבורה אבלית מסדר 144 תהיה איזומורפית לאחת, ורק אחת, מן החבורות ברשימתך.

(ב) להלן שלוש חבורות אבליות מסדר 144. לאיזו חבורה ברשימה שלך כל אחת מהן איזומורפית?

i. $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_8$.

ii. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

iii. $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_9$.

3. תהי G חבורה סופית ויהי n מספר טבעי זר ל- $|G|$. הוכח שההעתקה $f : G \rightarrow G$ המוגדרת על ידי $f(g) = g^n$ לכל $g \in G$ הינה חד-חד-ערכית ועל. הצג דוגמא שמראה כי f אינה בהכרח הומומורפיזם.

4. יהי F שדה בעל q איברים.

(א) הוכח שכל איבר של F הינו שורש של הפולינום $P(x) = x^q - x$.

(ב) בשדה \mathbb{F}_{17} עם שבעה עשר איברים, מצא את כל השורשים של הפולינום $x^{22} + x^{20} + x^{17} - x^6 - x^4 + 3$.

5. תהי G חבורה, ויהיו $a, b \in G$ שני איברים לא טריוויאליים שמקיימים $a * b * a^{-1} = b^2$.

(א) הוכח כי $a^5 * b * a^{-5} = b^{32}$.

(ב) נניח כי $o(a) = 5$. מהו $o(b)$?