

מתמטיקה בדידה – תרגיל 4

שאלה 1

תהי קבוצה לא ריקה A ותהי פונקציה $f: A \rightarrow A$. נגדיר פונקציה $g: A \rightarrow P(A)$ ע"י

$$g(a) = f^{-1}[f[\{a\}]] \Delta f[f^{-1}[\{a\}]]$$

א. הוכח/הפריך: אם g אינה חח"ע אז f חח"ע

ב. הוכח/הפריך: אם f חח"ע אז g אינה חח"ע

ג. הוכח/הפריך: אם f על אז g חח"ע

שאלה 2

יהיו A, B קבוצות סדורות חלקית. תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה המקיימת

$$\forall x, y \in A: x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)$$

א. נניח B סדורה באופן מלא. הוכח/הפריך: $\forall x, y \in A: x \leq y \leftrightarrow f(x) \leq f(y)$

ב. נניח A סדורה באופן מלא. הוכח/הפריך: $\forall x, y \in A: x \leq y \leftrightarrow f(x) \leq f(y)$

שאלה 3

תהי פונקציה $f: A \rightarrow B$. נגדיר יחס R על $P(B)$ על ידי $(X, Y) \in R \Leftrightarrow f^{-1}[X] \Delta f^{-1}[Y] = \emptyset$. הוכח/הפריך: יחס שקילות.

שאלה 4

תהי פונקציה $f: A \rightarrow B$. נגדיר פונקציה $g: P(B) \rightarrow P(A)$ ע"י $g(X) = f^{-1}[X]$

א. הוכח/הפריך: $Y \in \text{im}(g)$ (התמונה) אם"ם $f^{-1}[f[Y]] = Y$

ב. הוכח/הפריך: g חח"ע אם"ם f הפיכה

ג. הוכח/הפריך: g אינה על

שאלה 5

תהי קבוצה X ותהי פונקציה $f: X \rightarrow X$. תהינה $A, B \subseteq X$. הוכח/הפריך:

$$f[A \setminus B^c] = f[A] \setminus (f[B])^c$$

שאלה 6

תהי קבוצה לא ריקה A . תהי קבוצה $B \subseteq P(A)$ כך שלכל $X, Y \in B$ מתקיים $X = Y$ או

$$\forall X \in B: f(X) \in X$$
 המקיימת $f: B \rightarrow A$

א. הוכח/הפריך: f חח"ע

ב. הוכח/הפריך: f על

ג. הוכח/הפריך: $B \neq P(A)$

ד. הוכח/הפריך: $f[B] = A$ אם"ם $\cup B = A$ ו B מכילה נקודונים בלבד

שאלה 7

א. הוכח לפי ההגדרה כי $|(0,1)| = |[0,1]|$

ב. תהי A קבוצה אינסופית. הוכיחו שקיים יחס שקילות על A בעל שני מחלקות שקילות שכל אחת מהן מעוצמה שווה ל A . (רמז: מותר להשתמש בעובדה ש $|A| = |A \times \{1,2\}|$)

ג. הוכח לפי ההגדרה כי $|P(A)| = |\{f \mid f : A \rightarrow \mathbb{Z}_2\}|$ (כלומר עוצמת קבוצת החזקה שווה לעוצמת קבוצת כל הפונקציות ה"ל)