קורס: 88-231-01,05,07
מרצה: ש. הורוביץ
י"ב אלול תשע"ד

מבחן בפונקציות מרוכבות
מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות. כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט. *יש חובה לנמק כל תשובה!*
משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. נסמן $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. הוכיחו שלכל משולש שווה צלעות במישור המרוכב קיימים מספרים $a,b\in\mathbb{C}$ כך שהקדקודים של המשולש הם $a+b, a$ ו-$a+\omega b$ או $a+\bar{\omega}b$.

2. מצאו את מספר האפסים כולל ריבוי שיש לפונקציה $3z^6 - e^z$ בעיגול היחידה $B(0,1)$.

3. מצאו את טור לורן של הפונקציה $\frac{z}{(z-2)^2(z+1)}$ בטבעת $\left\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<2\right\}$

4. נניח ש-$f(z)$ פונקציות שלימה, ונניח שקיים קבוע $M>0$ ומספר טבעי k כך שלכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)|\le M(1+|z|^k)$. הוכיחו ש-$f(z)$ פולינום ממעלה k לכל היותר. (הסתמכו על נוסחת קושי לנגזרת מסדר $k+1$.)

5. עבור כל $2\le n\in\mathbb{N}$ חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx$. השתמשו באינטגרל על מסילה שמורכבת מקטע ישר מ-0 עד $R>0$, קשת של עיגול מ-R עד $\mathrm{Re}^{\frac{2\pi i}{n}}$ וקטע ישר מ-$\mathrm{Re}^{\frac{2\pi i}{n}}$ עד 0. שימו לב שהאינטגרלים על שני הקטעים הישרים קשורים מאד.

6. א. הוכיחו שאם $f(z)$ היא פונקציה שלימה אז גם הפונקציה $\overline{f}(\bar{z})$ שלימה.
ב. הסתמכו על סעיף א' להוכיח שאם $f(z)$ פונקציה שלימה כך שלכל $z\in\mathbb{R}$, $f(z)\in\mathbb{R}$, אז לכל $z\in\mathbb{C}$ $f(\bar{z})=\overline{f}(z)$