מבני נתונים ואלגוריתמים

זרימה

זרימה

רשת זרימה מורכבת מגרף $G=(V,E)$, מקודקוד מקור $s \in V$, מקודקוד מטרה (בור) $t \in V$,ופונקציית **קיבול** $C: V \times V -> \mathbb{R}$. אם לא קיימת קשת מ$v$ ל u אזי מתקיים $C(u,v)=0$.

במילים אחרות:

$C(e)$: הזרימה המקסימלית שניתן להעביר דרך קשת $e \in E$.

זרימה

נתונה רשת זרימה.

פונקציית זרימה: נחזור ברשת זרימה G כמו בשקף הקודם.

<u>ערך הזרימה</u> שיוצאת מהמקור – $|f| = \sum_{v \in V/\{s\}} f(s,v)$ (הזרימה מהמקור לקודקודים שיש קשת מהמקור אליהם).

1) אילוצי קיבולת – לכל $u,v \in V$ מתקיים $f(u,v) \le c(u,v)$.
2) סימטריה נגדית – לכל $u,v \in V$ מתקיים $f(u,v) = -f(v,u)$ (זרימה מ-u ל-u שווה ל-0)
3) שימור הזרימה – לכל $u \in V/\{s,t\}$ דורשים ש- $\sum_{v \in V} \mathrm{f}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = 0$

הרשת השיורית

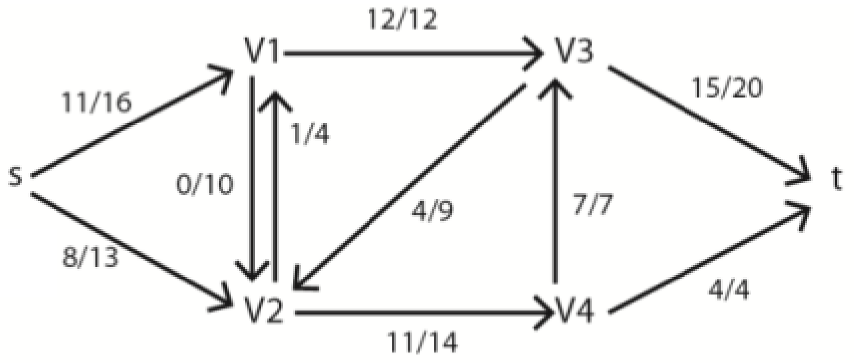
<u>רשת שיורית:</u> בהינתן רשת זרימה וזרימה, הרשת השיורית מורכבת מקשתות שיכולות להכיל זרימה נוספת.

<u>קיבולת שיורית של *(u,v)*</u>: $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$

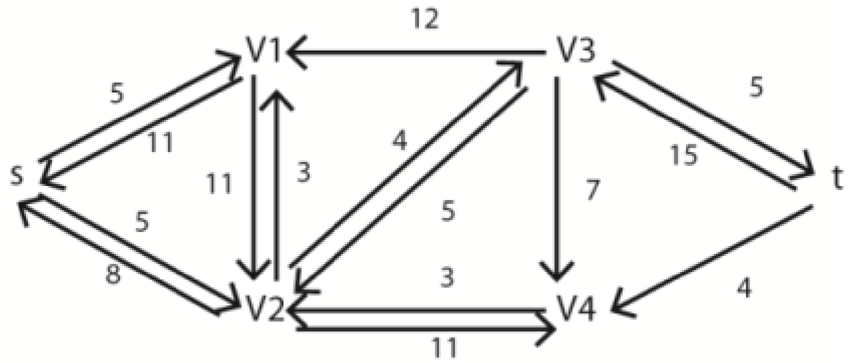
גרף השיורית של רשת זרימה G וזרימה f הוא גרף $G_f = \left(V, E_f\right)$ כאשר

$$E_f = \{(u,v) \in V \times V : c_f(u,v) > 0$$

דוגמא:



רשת זרימה G עם זרימה f=19



גרף השיורית של G עם זרימה f=19

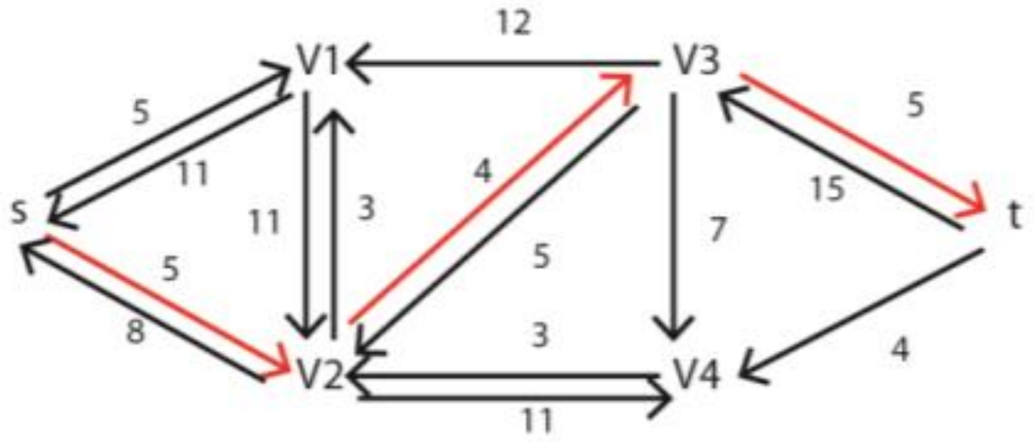
הרשת השיורית

הערה: (u,v)יכולה להיות קשת ב-G_f גם אם היא לא קשת ב-G כי כאשר $f(u,v)<0$ אז מקבלים $c_f(u,v) > 0$. לכן $|E_f| \leq 2|E|$.

מסלול שיפור

<u>מסלול שיפור:</u> בהינתן רשת זרימה G וזרימה f, מסלול שיפור הוא מסלול פשוט מ-s ל-t ב-G_f.

לדוגמא:



P (באדום) הוא מסלל שיפור עם קיבולת $c_f(P) = 4$.

חתך

<u>חתך (S,T)</u> של רשת זרימה היא חלוקת V ל-2 קבוצות S ו- $T=V/S$ כך ש- $s \in S$ ו-$t \in T$.

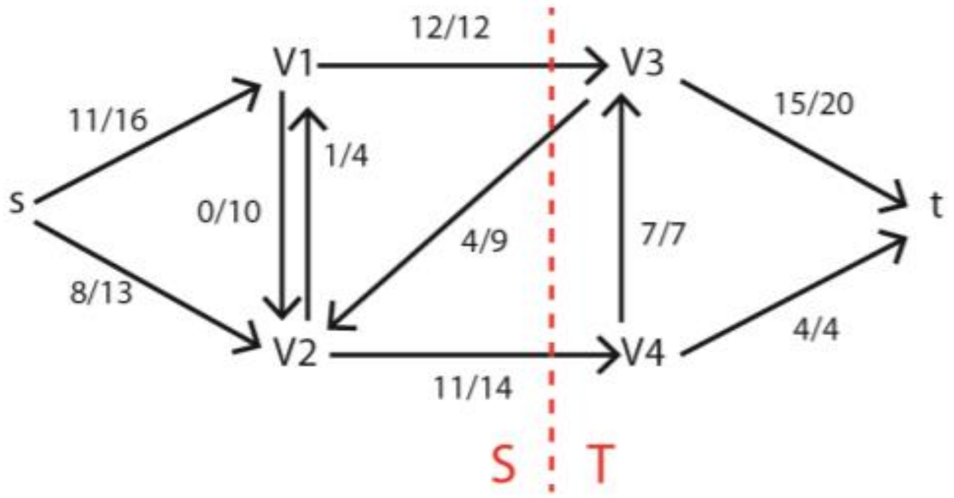
אם f זרימה, אז:

- $f(S,T)$ היא **הזרימה על החתך** ומוגדרת להיות $f(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v)$.
- $c(S,T)$ היא **הקיבולת על החתך** ומוגדרת להיות $c(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v)$.

<u>חתך מינימלי:</u> חתך שהקיבולת שלו היא המינימלית מבין כל החתכים.

חתך

לדוגמא:



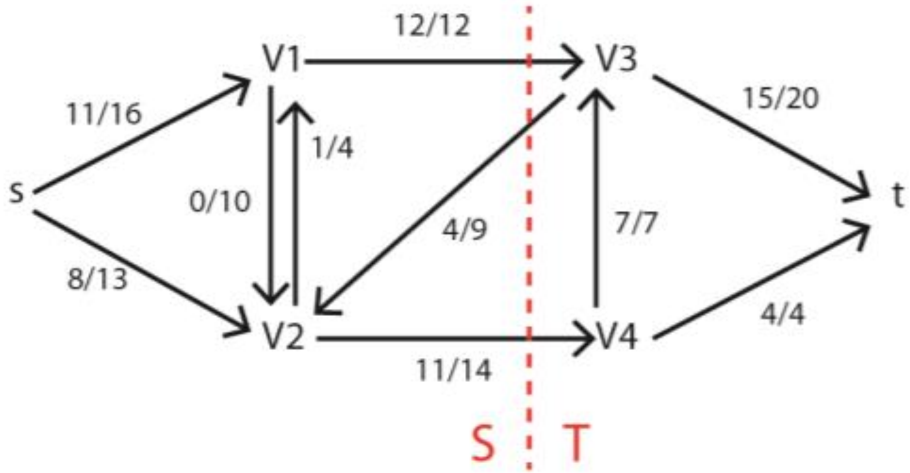
הזרימה על החתך:

$$f(S,T) = f(v1,v3) + f(v2,v3) + f(v2,v4) = 12 + (-4) + 11 = 19$$

- *f(S,T)* עשויה להכיל זרימות שליליות כי זה זרימה מ-*S* ל-*T*.

חתך

לדוגמא:



הקיבולת של החתך:

$$c(S,T) = c(v1,v3) + c(v2,v4) = 12 + 14 = 26$$

- *c(S,T)* מכילה רק ערכים חיוביים.

משפט MIN-CUT-MAX-FLOW

תהי f זרימה ברשת זרימה G. התנאים הבאים שקולים:

1) f זרימה מירבית ב-G

2) ברשת השיורית G_f אין מסלול שיפור מ-s ל-t.

3) קיים חתך (S,T) כך ש-$c(S,T) = |f|$ (כלומר (S,T) חתך מינימלי).

← ברשת זרימה מתקיים שהזרימה המקסימלית שווה לקיבולת של החתך המינימלי.

אלגוריתמים למציאת זרימת מקסימום

אלגוריתם Ford-Fulkerson

1. התחל מזרימה ריקה $f = 0$.
2. כל עוד קיים מסלול שיפור מ s ל t ברשת השיורית N_f:
   העבר זרימה דרך מסלול שיפור זה (עדכן את f).

<u>נכונות</u>: לפי משפט ה Min-Cut Max-Flow.

<u>סיבוכיות</u>: $O(E|f^*|)$.

כאשר f^* זרימת המקסימום ברשת ו $|f^*|$ ערכה.

אלגוריתמים למציאת זרימת מקסימום

אלגוריתם Ford-Fulkerson

1. התחל מזרימה ריקה $f = 0$.
2. כל עוד קיים מסלול שיפור מ s ל t ברשת השיורית N_f:
   העבר זרימה דרך מסלול שיפור זה (עדכן את f).

<u>נכונות</u>: לפי משפט ה Min-Cut Max-Flow.

<u>סיבוכיות</u>: $O(E|f^*|)$.

כאשר f^* זרימת המקסימום ברשת ו $|f^*|$ ערכה.

אלגוריתם FORD-FULKERSON

אלגוריתם *Ford-Fulkerson* למציאת זרימה מקסימלית:

<u>*Ford-Fulkerson(G, s, t):*</u>

for each $(u,v) \in E$

$f(u,v) = 0$ | אתחול הזרימה ל-0

$f(v,u) = 0$

$G_f = G$

while there exists a path P from s to t in G_f | חיפוש מסלול באמצעות DFS

$c_f(P) = \min\{c_f(u,v) \mid (u,v) \in P\}$ | הקיבולת של P זה הקיבולת של הקשת עם הקיבולת הכי נמוכה

for each $(u,v) \in P$

$f(u,v) = f(u,v)+c_f(P)$ | עדכון P ב-G

$f(v,u) = -f(u,v)$

$c_f(u,v) = c(u,v)-f(u,v)$ | עדכון P ב-G_f

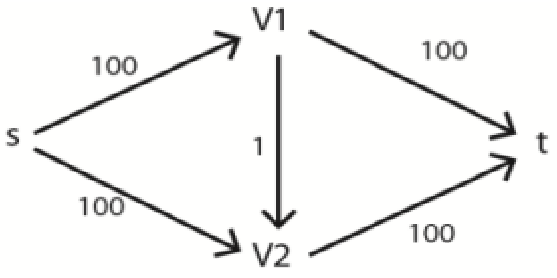
$c_f(v,u) = c(v,u)-f(v,u)$

שיפור

שיפור: **האלגוריתם של *Edmonds-Karp*:**
הרעיון הכללי: האלגוריתם זהה ל-*FF* אך במציאת מסלול משפר, מחפשים את המסלול הקצר ביותר.
סיבוכיות: $O(|V|*|E|^2)$

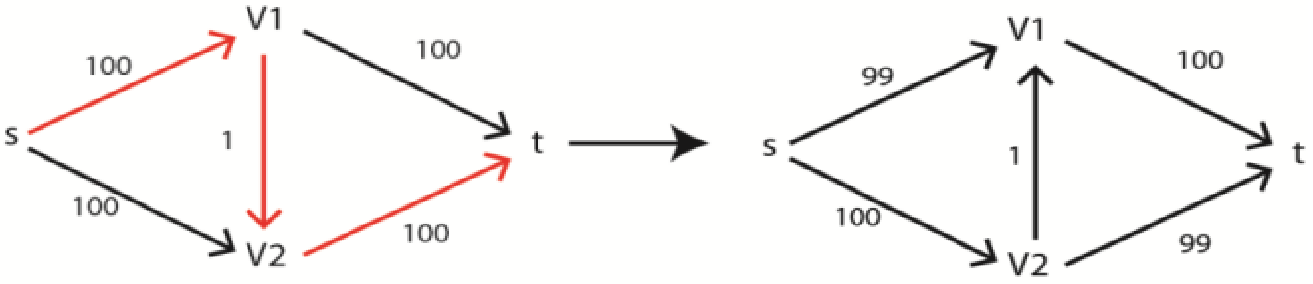
תרגיל:

נתונה רשת זרימה G. הוכח/הפרך: אם באיטרציה ה-i בהרצת פורד-פלקרסון הקשת e נעלמת מ-G_f, אזי e א תופיעה ב-G_f באיטרציות הבאות.



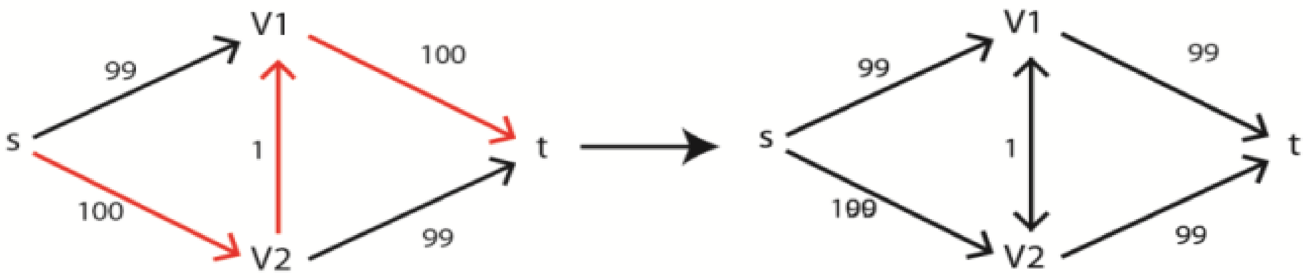
פיתרון:

לא נכון. דוגמא נגדית:



ניקח את המסלול $P=\{s,v1,v2,t\}$ עם קיבולת 1.

הקשת $(v1,v2)$ נעלמה ובמקומה הופיעה $(v2,v1)$



כעת ניקח מסלול שיפור $P=\{s,v2,v1,t\}$ (שוב עם קיבולת 1).

הקשת $(v1,v2)$ שוב מופיעה.

<u>הגדרה</u>: **רשת זרימה שלמה** היא רשת שבה כל הקיבולות הן מספרים שלמים. **זרימה שלמה** היא זרימה f בה מתקיים לכל $u,v \in V$ $\quad f(u,v) \in \mathbb{Z}$.

<u>תרגיל:</u>

הוכח/הפרך:

1) ברשת זרימה שבה הקיבולת של כל קשת קטנה מ-7, האלגוריתם של פורד-פלקרסון עושה $O(|E|)$ איטרציות;.
2) כנ"ל ברשת זרימה לא שלמה

<u>הגדרה</u>: **רשת זרימה שלמה** היא רשת שבה כל הקיבולות הן מספרים שלמים. **זרימה שלמה** היא זרימה f בה מתקיים לכל $u, v \in V$ $\quad f(u, v) \in \mathbb{Z}$.

<u>תרגיל:</u>

הוכח/הפרך:

1) ברשת זרימה שבה הקיבולת של כל קשת קטנה מ-7, האלגוריתם של פורד-פלקרסון עושה *O(|E|)* איטרציות.;
2) כנ"ל ברשת זרימה לא שלמה

<u>פיתרון:</u>

1) נכון. הוכחה:
- נתון גרף כנ"ל.
- לכל חתך *(S,T)* מתקיים שמשקל החתך הוא לכל היותר

$$\sum_{(u,v)\in E} c(u,v) \leq \sum_{(u,v)\in E} 7 = 7|E|$$

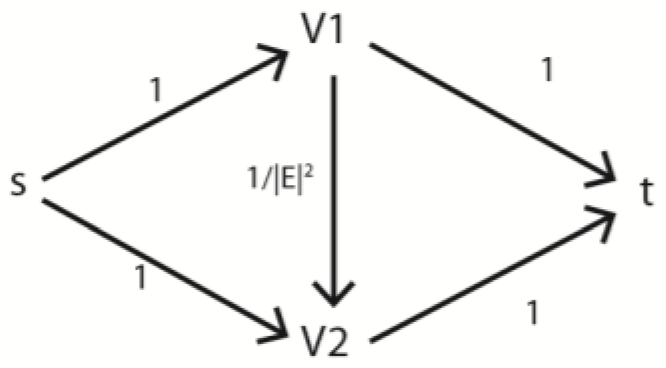
- כל איטרציה של פורד-פלקרסון חייבת לשפר את הזרימה לפחות ב-*1* (הרשת שלמה),ולכן מספר השיפורים האפשריים הוא לכל היותר *7|E|* ← *O(|E|)*.

הגדרה: **רשת זרימה שלמה** היא רשת שבה כל הקיבולות הן מספרים שלמים. **זרימה שלמה** היא זרימה f בה מתקיים לכל $u, v \in V \qquad f(u,v) \in \mathbb{Z}$.

תרגיל:

הוכח/הפרך:

1) ברשת זרימה שבה הקיבולת של כל קשת קטנה מ-7, האלגוריתם של פורד-פלקרסון עושה $O(|E|)$ איטרציות.;
2) כנ"ל ברשת זרימה לא שלמה



2) לא נכון. דוגמא נגדית:

נשפר את הזרימה לסירוגין על המסלולים:

{s,v1,v2,t}

{s,v2,v1,t}

האלגוריתם יסתיים אחרי $2|E|^2$ איטרציות כי הזרימה משופרת בכל איטרציה ב-$\frac{1}{|E|^2}$ והזרימה המקסימלית היא *2*.

תרגיל:

נתונה רשת זרימה *G = (V,E,c)* קבוצת מקורות $S = \{s_1, s_2, .., s_k\}$ וקבוצת יעדים $T = \{t_1, t_2, .., t_n\}$.
כיצה ניתן למצוא זרימה מקסימלית כאשר מותר להזרים מכל מקור לכל יעד?

פורמלית, הזרימה צריכה לקיים:

$$f(u,v) \le c(u,v)$$

$$f(u,v) = -f(v,u)$$

$\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$ לכל u למעט $u \in S \cup T$.

תרגיל:

נתונה רשת זרימה $G = (V,E,c)$ קבוצת מקורות $S = \{s_1, s_2, .., s_k\}$ וקבוצת יעדים $T = \{t_1, t_2, .., t_n\}$.
כיצה ניתן למצוא זרימה מקסימלית כאשר מותר להזרים מכל מקור לכל יעד?

פורמלית, הזרימה צריכה לקיים:

$$f(u,v) \leq c(u,v)$$

$$f(u,v) = -f(v,u)$$

$\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$ לכל u למעט $u \in S \cup T$.

פיתרון:

ניצור רשת חדשה G_0 ע"י הוספת:

- מקור "על" s_0 עם קשת (s_0,s) לכל $s \in S$ שהקיבולת שלהן היא ∞ (כלומר אין מגבלה על הזרימה)
- יעד "על" t_0 עם קשת (t_0,t) לכל $t \in T$ שהקיבולת שלהן היא ∞.

נמצא זרימה מקסימלית ב- G_0 מ-s_0 ל-t_0.

נסיר את s_0 ו-t_0 ונקבל את הזרימה המקסימלית ב-G.