מבני נתונים ואלגוריתמים

מסלולים קצרים

מסלולים קלים ביותר

יש שתי בעיות עיקריות:

א. מסלולים קלים ביותר ממקור יחיד (SSSP)

אלגוריתם Dijkstra

אלגוריתם Bellman-Ford

ב. בעיית All Pairs Shortest Paths – APSP

אלגוריתם Floyd-Warshall

מציאת מסלולים קצרים

<u>הבעיה</u>: נתון גרף. ממשוקל. רוצים למצוא את המסלול הקצר בין זוג קודקודים.

עיקרון ***הרלקסציה*** של קשת: בדיקה האם ניתן לשפר מסלול מ-s ל-v ע"י מעבר דרך קודקוד u:

$$d[v] > d[u] + w(u,v)$$

?

שאלה לחימום

נתון גרף $G=(V,E)$ ופונקציית משקל $w:E\to R$ חיובית וקבועה. הצע אלגוריתם אשר מוצא את המסלול בקצר ביותר ביעילות $O(V+E)$.

שאלה לחימום

נתון גרף G=(V,E) ופונקציית משקל w:E->R חיובית וקבועה. הצע אלגוריתם אשר מוצא את המסלול בקצר ביותר ביעילות O(V+E) .

כיוון שפונקציית משקל היא קבועה, משקל מסלול פרופורציונלי לאורכו. לכן ניתן לפתור מקרה זה ע"י הרצת BFS.

__האלגוריתם של ***Dijkstra*** (משקלים חיוביים):__

קלט: גרף נתון גרף מכוון/לא מכוון $G=(V,E)$, פונקציית משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{R}^{+}$
(כלומר $\forall\, e \in E, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{e}) > 0$) וקודקוד מקור s.
פלט: לכל $v \in V$ - אורך המסלול (=משקל המסלול) הקצר ביותר מ-s ל-v.

הרעיון: תחילה מגדירים את המרחק מ-s לכל קודקוד להיות משקל הקשת בינו לבין s אם קיים, אחרת אינסוף, במערך D. אחר כך בלולאה מחפשים את הקודקוד בגרף שהמרחק שלו מ-s הוא המינימלי. בודקים עבורו האם קיים מסלול קל יותר מ-s אליו שעובר דרך קודקוד שאינו ב-S (קודקודים שכבר מצאנו עבורם את המסלול הקצר ביותר).

Dijkstra (G, W, s):

S ={s}

D(s) = 0

for each $v \in V/S$

$$D(v) = \begin{cases} w(s,v), & (s,v) \in E \\ \infty, & (s,v) \notin E \end{cases}$$

while $S \neq V$

find $v \in V/S$ *so that D(v) = min(D)*

$S = S \cup \{v\}$

for each $u \in V/S$

D(u) = min(D(u), D(v) + w(v,u)) *(relaxation)*

סיבוכיות:

- $O(|V|^2)$.
- ניתן לשפר עם ערימת פיבונצ'י – $O(|V|log|V| + E)$.

האלגוריתם של ***Bellman-Ford*** (גם משקלים שליליים):

קלט: גרף נתון גרף **מכוון** $G = (V, E)$, פונקציית משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{R}$ (כלומר ייתכנו משקלים שליליים), וקודקוד מקור s.
פלט: לכל $v \in V$ – אורך המסלול (=משקל המסלול) הקצר ביותר מ-s ל-v.

הרעיון: לעומת דייקסטרה, האלגוריתם הזה לא חמדני. עוברים על כל הקשתות |V|-1 *פעמים, ועושים "הקלה" עבור כל קשת אם אפשר. אם אחרי כל האיטרציות, עדיין ניתן לעשות רלקסציה לקת מסוימת, סימן שיש מעגל שלילי, והאלגוריתם לא יחזיר מרחקים קצרים אלא* false.

```
Bellman-Ford( G, W, s):
for each v ∈ V
        d(v) = ∞
        Π(v) = NULL
d(s) = 0
for i=1 to |V|-1
        for each e = (u,v) ∈ E
                if d(v) > d(u) + w(u,v)
                        d(v) = d(u) + w(u,v)
                        Π(v) = u
for each e = (u,v) ∈ E // search for negative cycle
        if d(v) > d(u) + w(u,v)
                return false
return true
```

סיבוכיות: $O(|V|*|E|)$

תרגיל:

גרף נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{R}$.

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1) נגדיר פונקצית משקל חדשה $c: E \to \mathbb{R}$ כך ש- $c(e) = w(e) + a$ (a אי-שלילי). אם P הוא המסלול הקצר ביותר בין זוג קודקודים לפי w, הוא גם הקצר ביותר לפי c.

2) כנ"ל עם פונקציית המשקל $c(e) = w(e) * a$.

תרגיל:

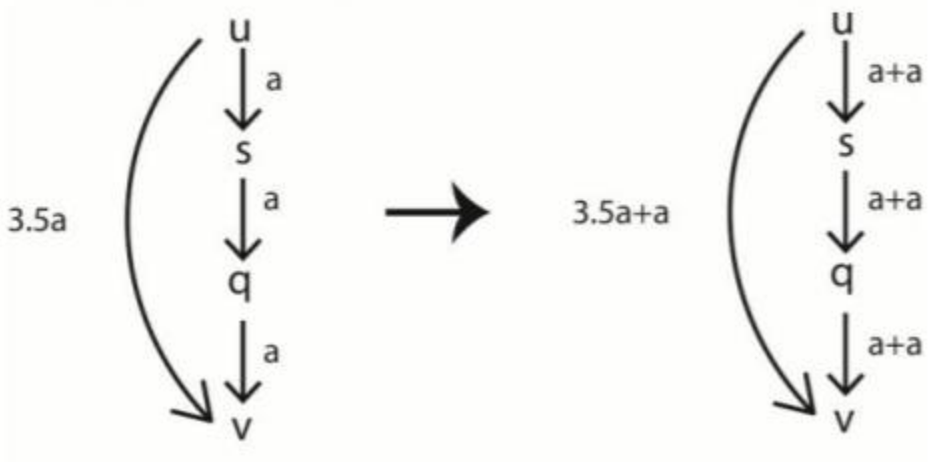
גרף נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{R}$.

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1) נגדיר פונקציית משקל חדשה $c: E \to \mathbb{R}$ כך ש- $c(e) = w(e) + a$ (a אי-שלילי). אם P הוא המסלול הקצר ביותר בין זוג קודקודים לפי w, הוא גם הקצר ביותר לפי c.
2) כנ"ל עם פונקציית המשקל $c(e) = w(e) * a$.

פיתרון:

1) לא נכון. דוגמא נגדית:



תרגיל:

גרף נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V,E)$ ופונקציית משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{R}$.

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1) נגדיר פונקצית משקל חדשה $c: E \to \mathbb{R}$ כך ש- $c(e) = w(e) + a$ (a אי-שלילי). אם P הוא המסלול הקצר ביותר בין זוג קודקודים לפי w, הוא גם הקצר ביותר לפי c.
2) כנ"ל עם פונקציית המשקל $c(e) = w(e) * a$.

הטענה נכונה. יהא P מסלול קל ביותר מ u ל v תחת w.
נניח בשלילה שקיים מסלול Q מ u ל v עבורו $c(Q) < c(P)$.

$$c(P) = \sum_{e \in P} c(e) = \sum_{e \in P} a \cdot w(e) = a \cdot \sum_{e \in P} w(e) = a \cdot w(P) \leq$$

$$\leq a \cdot w(Q) = a \cdot \sum_{e \in Q} w(e) = \sum_{e \in Q} a \cdot w(e) = \sum_{e \in Q} c(e) = c(Q)$$

אי השוויון נובע מכך ש $w(P) \leq w(Q)$.
זו סתירה, היות והנחנו כי $c(Q) < c(P)$.

תרגיל

נתון גרף מכוון $G = (V,E)$ עם משקלים אי-שליליים על הקשתות, פרט לקשת יחידה $e = (a,b)$ שמשקלה שלילי. נתון כי אין מעגלים בעלי משקל שלילי בגרף. נתון צומת $s \in V$. הציעו אלגוריתם המחשב את $d_s(v)$ לכל $v \in V$ בזמן

$O(V + E \log V)$.

תרגיל

נתון גרף מכוון $G = (V,E)$ עם משקלים אי-שליליים על הקשתות, פרט לקשת יחידה $e = (a,b)$ שמשקלה שלילי. נתון כי אין מעגלים בעלי משקל שלילי בגרף. נתון צומת $s \in V$. הציעו אלגוריתם המחשב את $d_s(v)$ לכל $v \in V$ בזמן

$O(V + E \log V)$.

פתרון:

יהא $v \in V$. למסלול הקל ביותר מצומת s לצומת v יש שתי אפשרויות:

1. המסלול לא עובר דרך הקשת $e = (a,b)$.
2. המסלול עובר דרך הקשת $e = (a,b)$ פעם אחת בלבד.

תרגיל

פתרון:(הרעיון)

יהא $v \in V$. למסלול הקל ביותר מצומת s לצומת v יש שתי אפשרויות:

1. המסלול לא עובר דרך הקשת $e = (a,b)$.
2. המסלול עובר דרך הקשת $e = (a,b)$ פעם אחת בלבד.

נסמן ב $d'_s(v)$ את משקל המסלול הקל ביותר מצומת s לצומת v בגרף $G' = (V,E - \{e\})$.

לפי המבנה האופטימלי של מסלולים קלים ביותר (תת מסלול הוא מסלול קל ביותר):

$$d_s(v) = \min\{ d'_s(v) , d'_s(a) + w(e) + d'_b(v) \}$$

תרגיל

פתרון: (תאור האלגוריתם)

קלט: גרף מכוון $G=(V,E)$ בעל משקלים אי שליליים, למעט קשת $e=(a,b)$ שמשקלה שלילי, צומת s.

פלט: משקל מסלול קל ביותר $d_s(v)$ לכל $v\in V$.

תיאור האלגוריתם:

1. בנה את הגרף $G'=(V,E-\{e\})$.
2. בצע <u>שתי</u> הרצות של אלגוריתם Dijkstra על הגרף G'.
   - אחת עבור s, אחת עבור b.
3. חשב לכל צומת $v\in V$:

$$d_s(v)=\min\{\,d'_s(v)\,,d'_s(a)+w(e)+d'_b(v)\,\}$$

תרגיל

פתרון (הוכחת נכונות):

<u>נכונות:</u> מסלול קל ביותר מצומת s לצומת v יכול:

1. לא להשתמש ב e, ואז משקלו $d'_s(v)$.
2. להגיע ל a, לעבור דרך $e = (a,b)$ ולהמשיך ל v, במשקל $d'_s(a) + w(e) + d'_b(v)$.

המסלול הקל ביותר ב G הוא הטוב מבין שתי האפשרויות.

<u>סיבוכיות:</u> $O(V + E\log V)$.

תרגיל נוסף

תרגיל:

נתונים n סוגי מטבעות. שערי החליפין בין כל זוג מטבעות נתונים במטריצה A_{nxn} כך ש-A_{ij} הוא שער החליפין בין מטבע i ל-j (כלומר עבור מטבע אחד מסוג i ניתן לקנות A_{ij} מטבעות מסוג j).
הציעו אלגוריתם המכריע האם קיימת סדרת החלפת מטבעות, המתחילה ומסתיימת באותו מטבע כך שבסיומה נרוויח כסף.

פתרון

<u>פיתרון:</u>

נמיר את הבעיה למציאת מעגל שלילי בגרף.
הגדרת הגרף:

- $G = (V, E)$ על n צמתים.
- בין כל זוג צמתים תהיה קשת $w_{ij} = -\ln(A_{ij})$

רוצים לקבוע משקלים כך שמעגל שלילי בגרף יהיה שקול לסדרת החלפת מטבעות.

מעגל שלילי – אפשר להגיע מצומת לעצמו במסלול שמחירו קטן מ-0.

<u>האלגוריתם:</u>

- בנה גרף G כנ"ל.
- הרץ בלמן-פורד מקודקוד מקור שרירותי
- אם קיים מעגל שלילי – החזר אותו.

- מכיוון שהגרף קשיר, חיפוש מעגל שלילי לא תלוי בקודקוד המקור.

<u>סיבוכיות:</u> $|E| = n^2$, $|V| = n$ $\leftarrow$ $O(n^3)$.

הוכחת נכונות:

אם $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$ הוא מעגל שלילי, אז מתקיים:

$$-\ln(A_{12}) - \ln(A_{23}) - \cdots - \ln(A_{k1}) < 0$$

$$-\ln(A_{12} \cdot A_{23} \cdot \ldots \cdot A_{k1}) < 0$$

$$A_{12} \cdot A_{23} \cdot \ldots \cdot A_{k1} > 1$$

כלומר ממטבע יחיד מסוג 1 נקבל יותר ממטבע מסוג 1 בסוף הסדרה, לכן אפשר להרוויח כסף ע"י המרת v_1 בסדר הבא:

$$v_1 \rightarrow \ldots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$$

אלגוריתם WARSHALL-FLOYD

<u>האלגוריתם של ***Floyd-Warshall***:</u>

קלט: גרף נתון גרף מכוון/לא מכוון $G=(V,E)$, פונקציית משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{R}^{+}$
(כלומר $\forall\, e \in E, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{e}) > 0$).
פלט: אורך המסלול הקצר ביותר מכל קודקוד לכל קודקוד.

הרעיון: האלגוריתם מתבסס על האבחנה הבאה – אם ממספרים את הקודקודים n ,...,1,2 *ומסמנים ב-*$\mathrm{d_k(x,y)}$ *את משקל המסלול הקצר ביותר מ-*x *ל-*y *שעובר אך ורק בקודקודים מתוך הקבוצה* $\{1,2,\dots,k\}$, *אז מתקיים :* $\mathrm{d_k(x,y)} = \min\{\mathrm{d_{k-1}(x,y)}, \mathrm{d_{k-1}(x,k)} + \mathrm{d_{k-1}(k,y)}\}$. *כלומר תמיד מתקיים אחד משניים:*

- *אם המסלול הקצר ביותר מ-*x *ל-*y *שעובר דרך קודקודים שמספרם לכל היותר* k *ולא עובר ב-*k *עצמו, אז* $\mathrm{d_k(x,y)} = \mathrm{d_{k-1}(x,k)}$.
- *אחרת, אם המסלול כן עובר ב-*k *עצמו, הוא עובר בו רק פעם אחת (כי אין מעגלים שליליים בגרף) ואז אפשר לפרק את המסלול ל-2 : מסלול מ-*x *ל-*k *ומסלול מ-*k *ל-*y*. מסלולים אלו לא עוברים דרך קודקודים שמספרם גדול מ-*k-1*, לכן משקל המסלול הכולל יהיה* $\mathrm{d_{k-1}(x,k)} + \mathrm{d_{k-1}(k,y)}$.

כעת נשאר לבדוק איזה מסלול קצר יותר עבור על קודקוד.

Floyd-Warshall (G, W):

```
for k=1 to n
        for i=1 to n
                for j=1 to n
```

$$d_{ij}^{k} = min\{\underbrace{d_{ij}^{k-1}}_{\text{המסלול לא עובר ב-}k}, \underbrace{d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}}_{\text{המסלול עובר ב-}k}\}$$

d_{ij}^{k} - נמרחק המינימלי בין i ל-j כאשר המסלול בין הקודקודים הממוספרים לכל היותר k.

סיבוכיות: $O(|V|^3)$

ALL PAIRS SHORTEST PATHS–הערה

ניתן להריץ את Bellman-Ford מכל קודקוד בגרף.

$O(V^2 * E)$

אם כל המשקלים חיוביים, ניתן לעשות זאת עם אלגוריתם Dijkstra.

תרגיל – טכניון

בחברת הספנות "save the dolphins" מעבירים סחורות בין n נמלים המקושרים ע"י m נתיבי ים (נתיב ים הוא דו כיווני). עבור כל נתיב ים ידוע: (1) משך הזמן שלוקח לעבור אותו (מספר חיובי) ו (2) האם הוא עובר דרך אזור מחייה של דולפינים (אפשר להניח שאין יותר מאזור מחייה אחד בנתיב אחד).

משיקולי איכות הסביבה, חברת הספנות מעוניינת למצוא את המסלול מכל נמל לכל נמל, שעובר דרך **<u>מספר מינימאלי של אזורי מחייה</u>** של דולפינים. במידה וקיימים כמה מסלולים שעוברים דרך אותו מספר אזורי מחייה יועדף המסלול הקצר ביותר מבחינת זמן.
הצע אלגוריתם בסיבוכיות $O(n^3)$ שפותר את הבעיה. הסבר בקיצור את נכונות האלגוריתם, אין צורך בהוכחה פורמאלית.
הנחייה: מצא דרך לאחד את <u>מספר אזורי המחייה</u> ואת הזמן לפונקצית משקל אחת.

פתרון

ניצור גרף מכוון G(V,E) בו כל עיר נמל תיוצג ע"י צומת. נתיב ים מיוצג ע"י שתי קשתות אנטי מקבילות המחברות בין זוג צמתים. כל קשת מאופיינת ע"י 2 פרמטרים: מס' אזורי מחייה של דולפינים, s, ומשך זמן, t . נפעיל אלגוריתם פלויד וורשל למציאת מסלולים קצרים ביותר עם השינוי הבא:

נגדיר אופרטורי < = > להשוואה בין זוג קשתות $w_1(s_1,t_1), w_2(s_2,t_2) \in V$:

$$w_1 > w_2 \iff (s_1 > s_2) \vee ((s_1 = s_2) \wedge (t_1 > t_2))$$

$$w_1 = w_2 \iff (s_1 = s_2) \wedge (t_1 = t_2)$$

$$w_1 < w_2 \iff (s_1 < s_2) \vee ((s_1 = s_2) \wedge (t_1 < t_2))$$

סיבוכיות: כמו פלויד וורשל.