הרצאה 5 - פוטנציאל חשמלי:

$$\varphi_{12} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot\vec{ds}$$

$$U_e = \varphi \cdot q'$$

מטען בוחן

אנרגיה פוטנציאלית

נגדיר את φ כך שמישור הייחוס (נקודת האפס) זה יהיה ∞.

ולכן

$$\varphi_{p(x,y,z)} = -\int_{\infty}^{p} \vec{E}\cdot\vec{ds}$$

$$\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$$

$$\vec{ds} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

ששינו פוטנציאל של חלקיק נקודתי ראינו

$$\varphi = \frac{kq}{r}$$ - כתוצאה ממטען נקודתי

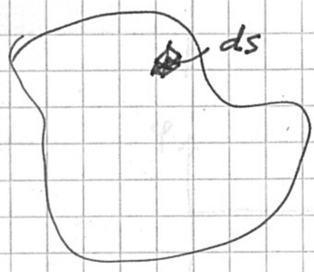
ובמקרה של הרבה חלקיקים

$$\varphi = k\sum \frac{q_i}{r_i}$$

ובאופן רציף

$$\varphi = k\int \frac{\rho\, dv}{r} = k\int_{x',y',z'} \frac{\rho_{x'y'z'}\,dx'dy'dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

כל המרחב



לפעמים נרצה ללכת בכיוון ההפוך מהפוטנציאל לשדה ולכן נגדיר את הגרדיאנט

$$\text{grad}(\varphi) \equiv \nabla\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}$$

nabla

ולכן

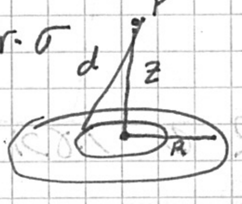
$$E = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$dq = 2\pi r\cdot dr\cdot\sigma$

$d = \sqrt{r^2+z^2}$

σ



דוגמה 5.1: ראינו ש השדה במקרה זה [דוגמה 2.1]

$$\vec{E} = 2\pi\sigma k z\left[\frac{1}{z} - (R^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

[נחשב על הציר]

$$\varphi = k\int_0^R \frac{\sigma\, 2\pi r\, dr}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = k\cdot\sigma\, 2\pi \Big|_0^R (r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\varphi = k\sigma 2\pi\left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right)}$$

עכשיו נבדוק

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -2\pi k\sigma\left[\frac{1}{2}(R^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2z - 1\right] \cancel{= 2\pi k\sigma[1-(R^2}$$

$$= 2\pi k\sigma\left[1 - (R^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot z\right] = 2\pi k\sigma z\left[\frac{1}{z} - (R^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

מקרי קיצון:

I)

$$Z=0$$

$$\varphi = k\sigma\, 2\pi R$$

שים לב: שה-φ הוא ~~האנרגיה~~ פוטנציאל שצריך להביא מאינסוף עד לאותה נקודה במרכז הדסקה.

II)

$$Z \to \infty$$

$$\sqrt{R^2+Z^2} - Z = Z\left(\left(1+\frac{R^2}{Z^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2}{Z}$$

בפיתוח טיילור $\sigma \to 0$ $(1+\sigma)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\sigma + \ldots$

ולכן

$$\varphi = k\sigma \cdot \cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{R^2}{Z} = k\sigma\, \pi \cdot \frac{R^2}{Z}$$

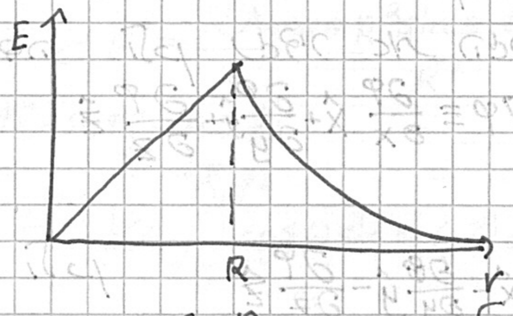
$$\boxed{\sigma \pi R^2 = Q}$$

$$\boxed{\varphi_{Z\to\infty} = \frac{kQ}{Z}}$$

דוגמה 5.2: כדור

הטענה שהשדה הוא

$r<R$	$r>R$
$\frac{kQr}{R^3}$	$\frac{kQ}{r^2}\hat{r}$



נחשב את הפוטנציאל נתחיל עם $r>R$

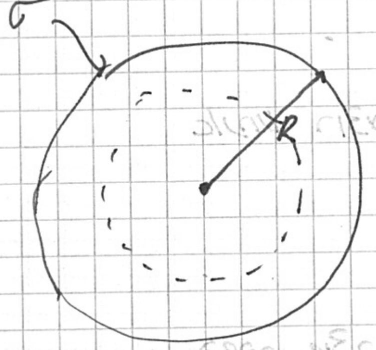
$$\varphi = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{r}' = -\int_\infty^r \frac{kQ}{r'^2}dr' = \frac{kQ}{r}$$

וכעת ש- $r<R$

$$\varphi = -\int_\infty^R \frac{kQ}{r'^2}dr' - \int_R^r \frac{kQr'}{R^3}dr'$$

$$\varphi = \frac{kQ}{R} - \Big|_R^r \frac{kQ}{R^3}\cdot\frac{r'^2}{2} = \frac{kQ}{R} - \frac{1}{2}\cdot\frac{kQr^2}{R^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{kQ}{R} = \frac{kQ}{2R^3}\left[3R^2 - r^2\right]$$

דוגמה 5.3: קליפה כדורית



נמצא את השדה

$r<R$: נשתמש בחוק גאוס ונמצא ש $\vec{E}=0$

$r>R$: " " " $\vec{E}=\frac{kQ}{r^2}\hat{r}$

$$=\frac{k\cdot 4\pi\sigma R^2}{r^2}\cdot\hat{r}$$

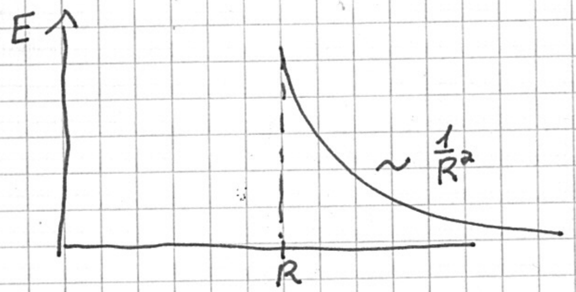
עכשיו נחשב את הפוטנציאל

$r>R$:

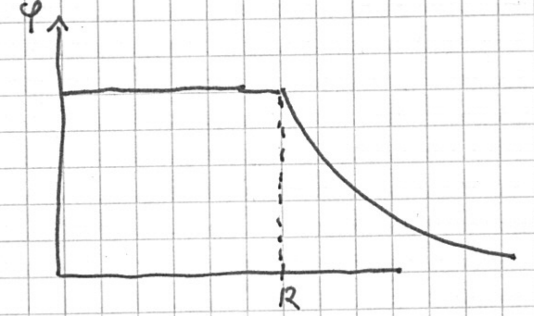
$$\varphi=-\int_{\infty}^{r}\frac{kQ}{r'^2}dr'=\frac{kQ}{r}$$

$r<R$:

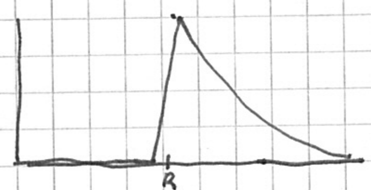
$$\varphi=-\int_{\infty}^{R}\frac{kQ}{r'^2}dr'-\int_{R}^{r}0\,dr'=\frac{kQ}{R}$$



הפוטנציאל:



הערה: באופן אמיתי יש עובי לקליפה הכדורית ולכן הגרף של השדה הוא:



$$\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}\qquad Q=4\pi R^2\sigma$$

$$\underset{r=R+\varepsilon}{E}=\frac{kQ}{R^2}=k\cdot\frac{4\pi R^2\sigma}{R^2}=4\pi k\sigma.$$

$$\underset{r=R-\varepsilon}{E}=0.$$

$$\vec{F}=\vec{E}\cdot dq\qquad dq=\sigma\cdot da$$

$$F\approx\frac{1}{2}[4\pi k\sigma-0]\cdot dq$$

$$F=2\pi k\sigma^2 da$$

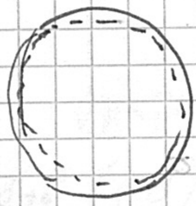
ולכן

כח ליחידת שטח $f = 2\pi k\sigma^2$

אנחנו רוצים לכווץ את הבלון מ R ל $R-dr$

$$dW = \overbrace{2\pi k\sigma^2}^{\text{כח ליחידת שטח}}\cdot 4\pi R^2\cdot dr = k8\pi^2 R^2\cdot\sigma^2\cdot dr$$

$$= \frac{kQ^2}{2R^2}\cdot dr$$



$$E = \frac{k\cdot Q}{R^2}$$ השדה שיצרנו בכיווץ

$$E^2\cdot dv$$
$$\parallel$$
$$\frac{k^2Q^2}{R^4}\cdot 4\pi R^2\cdot dr$$

$$dW = \frac{\varepsilon_0}{2}\cdot E^2\cdot dv$$

לכן הקשר בין השדה והאנרגיה

$$\boxed{u_e = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2}$$

אנרגיה ליחידת נפח