קריטריונים לאינטגרביליות

משפט (קריטריון דרבו)

תהי f מוגדרת על התיבה $I\subseteq\mathbb{R}^n$, אזי f אינטגרבילית על I אמ"מ f חסומה ו- $\overline{J}=\underline{J}$.

הוכחה

$\Leftarrow$ מ"ל ש- $\lim_{\sigma(P)\to 0}\overline{S}(f,P)=\overline{J}$, $\lim_{\sigma(P)\to 0}\underline{S}(f,P)=\underline{J}$.

נוכיח את השוויון הימני: יהי $\varepsilon>0$, אז $\exists$ חלוקה P_ε עבורה $\overline{S}(f,P_\varepsilon)<\overline{J}+\varepsilon$.

נסמן $P_\varepsilon=\{I_1,\dots,I_k\}$ אוסף של תיבות החלוקה
$\Gamma_\varepsilon=\bigcup_{j=1}^{k}\partial I_j$ קבוצת תוכן ש- $m(\Gamma_\varepsilon)=0$

ולכן קיים δ כך שלכל חלוקה P עם $\sigma(P)<\delta$
(נסמן $P=\{P_1,\dots,P_k\}$)

$$\sum_{P_i\cap\Gamma_\varepsilon\neq\emptyset} m(P_i)<\varepsilon$$

נסמן $P'=P_\varepsilon\cup P$ "איחוד" שתי החלוקות

$$\overline{S}(f,P')\le\overline{S}(f,P_\varepsilon)<\overline{J}+\varepsilon$$

מהמשפט קודם (אינטגרביליות $\Rightarrow$ חסימות), $|f|\le M$

לכן $|\overline{S}(f,P)-\overline{S}(f,P')|\le 2M\varepsilon$

$$\overline{J}\le\overline{S}(f,P)\le\overline{S}(f,P')+2M\varepsilon<\overline{J}+\varepsilon+2M\varepsilon=\overline{J}+\varepsilon(1+2M)$$

כנדרש.

$\Rightarrow$ ברור כי $\underline{J}\le I\le\overline{J}$ (סנדוויץ')

הגדרה

* תהי $f:E\to\mathbb{R}$ כאשר $E\subseteq\mathbb{R}^n$.
התנודה של f בקב' E מוגדרת ע"י

$$\omega(f,E)=\sup_{x,y\in E}|f(x)-f(y)|$$

* התנודה של f ב- $x\in E$ היא

$$\omega(f,x)=\lim_{\delta\to 0}\omega(f,E\cap B(x,\delta))$$

מסקנה

f רציפה ב-x אם"ם $\omega(f,x)=0$

למה

תהי f חסומה על I. אזי לכל $\varepsilon>0$ הקב'

$$E_\varepsilon=\{x\in I : \omega(f,x)\geq\varepsilon\}$$

היא קב' סגורה.

הוכחה

תהי x_0 נק' הצטברות של E_ε.

נניח בשלילה $x_0\notin E_\varepsilon$, כלומר $\omega(f,x_0)<\varepsilon$,

לכן קיים $\delta>0$ עבורו $\omega(f,E\cap B(x_0,\delta))<\varepsilon$,

לכן גם לכל $x\in B(x_0,\delta) \Rightarrow \omega(f,x)<\varepsilon$ סתירה.

משפט לבג

תהי $I\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה ותהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונק' חסומה על I.
אזי f אינטגרבילית אם"ם קב' נק' אי הרציפות של f היא בעלת מידה אפס.

הוכחה

קב' נק' אי הרציפות: $\{x : \omega(f,x)>0\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{x:\omega(f,x)\geq\frac{1}{m}\}$

נגדיר $A_m=\{x:\omega(f,x)\geq\frac{1}{m}\}$

$\Leftarrow$ נקבע $\varepsilon>0$. קיימת חלוקה P של I עבורה

$$S(f,P)-s(f,P)<\frac{\varepsilon}{m}$$

$$P=\{I_1,I_2,\dots,I_l\}$$

סימון: I_j° קב' הנק' הפנימיות

נניח $I_j^\circ\cap A_m\neq\emptyset \Leftarrow$ קיים $B(x_0,\delta)$ עבורו

$B(x_0,\delta)\subseteq I_j$ ו- $\omega(f,B(x_0,\delta))\geq\frac{1}{m} \Rightarrow M_j-m_j\geq\frac{1}{m}$

$$\frac{\varepsilon}{m}>S(f,P)-s(f,P)=\sum_{j=1}(M_j-m_j)m(I_j)\geq\sum_{j:I_j^\circ\cap A_m\neq\emptyset}(M_j-m_j)m(I_j)\geq$$

$$\geq\frac{1}{m}\sum_{j:I_j^\circ\cap A_m\neq\emptyset}m(I_j)$$

$$\Rightarrow \sum_{j:I_j^\circ\cap A_m\neq\emptyset}m(I_j)<\varepsilon$$

כעת $A_m \subset \underbrace{\Big(\bigcup_{j:\, I_j \cap A_m \neq \emptyset} I_j^\circ\Big)}_{\text{מידה אפס ממה שהוכחנו}} \cup \underbrace{\Big(\bigcup_{j=1}^{\ell} \partial I_j\Big)}_{\text{מידה אפס}}$

$\Longleftarrow$ A_m גם הוא ממידה אפס, כנדרש.

$\Longleftarrow$) נניח שלכל $k \in \mathbb{N}$ $m(A_k)=0$

נקבע $\varepsilon>0$ וניקח $m_\varepsilon = \left\lfloor \frac{2m(I)}{\varepsilon} \right\rfloor$

קיימת סדרת תיבות $\{J_i\}$ עבורה

$\sum_{i=1}^{\infty} m(J_i) < \frac{\varepsilon}{8M}$ $\quad A_{m_\varepsilon} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$

לכל i קיימת תיבה P_i: $J_i \subset P_i^\circ$, $m(P_i) \le 2m(J_i)$

$\sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) < \frac{\varepsilon}{4M}$ $\quad \underset{\text{קומפקטי}}{A_{m_\varepsilon}} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i^\circ$

קיים כיסוי סופי $\{P_{i_k}^\circ\}_{k=1}^{\ell}$: $A_{m_\varepsilon} \subset \bigcup_{k=1}^{\ell} P_{i_k}^\circ$

נסמן $B_k := P_{i_k}$

ניקח P חלוקה של I המכילה את כל הקודקודים של $\{I \cap B_k\}_{k=1}^{\ell}$. נרצה להוכיח שמקיימת עבורה $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$ ואז מקבלים מקריטריון דרבו.

$$S(f,P)-s(f,P) = \sum_{j=1}^{p}(M_j-m_j)m(A_j) = \sum_{j:\, A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\ell} B_k}(M_j-m_j)m(A_j) \left(\le \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$+\sum_{j:\, A_j \subset I \setminus \bigcup_{k=1}^{\ell} B_k}(M_j-m_j)m(A_j) \left(\le \frac{\varepsilon}{2m(I)} \cdot m(I)\right)$$

$\Downarrow$

הנדרש מתקיים

אינטגרלים

הגדרה

נאמר שקב' $E\subset\mathbb{R}^n$ היא קבוצה קבילה אם היא חסומה ושהשפה ∂E היא קב' במידה אפס.

דוגמה

$\mathbb{Q}\cap[0,1]$ אינה קבילה כי השפה שלה הוא כל הקטע.

למה

איחוד או חיתוך סופי של קב' קבילות היא גם קב' קבילה
ההפרש של שתי קב' קבילות הוא גם קבילה.

הוכחה

מההגדרה:

$$\partial(E_1\cup E_2)\subset\partial(E_1)\cup\partial(E_2)$$
$$\partial(E_1\cap E_2)\subset\partial(E_1)\cup\partial(E_2)$$
$$\partial(E_1\setminus E_2)\subset\partial(E_1)\cup\partial(E_2)$$

ומכאן נקבל את הנדרש.

הגדרה

פונק' המציינת של הקב' $E\subset\mathbb{R}^n$ היא:

$$\chi_E(x)=1_E(x)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$

פונק' זו אי רציפה רק בנק' השפה.

הגדרה

תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קב' קבילה ותהי $f:E\to\mathbb{R}$. נאמר ש-f אינטגרבילית על E אם קיים האינטגרל

$$\int_E f(x)dx=\int_I f\chi_E(x)dx$$

כאשר $E\subset I$ תיבה.

למה

תהי $E\subset I_1$ תיבה בה $\int_{I_1} f\chi_E dx$ קיים אזי לכל תיבה $E\subset I_2$ גם $\int_{I_2} f\chi_E dx$ קיים והם שווים.

הוכחה

מקריטריון לבג $f\chi_E$ רציפה כמעט בכל מקום, ולכן מקריטריון לבג $\int_{I_2} f\chi_E dx$ קיים

הערה: גם אם $I_1 \subset\subset I_2$ אז הוא קיים כי תיבות הן כמעט ממידה אפס.

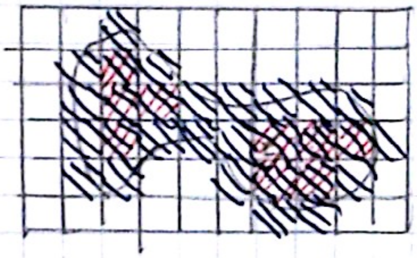
נגדיר $I = I_1 \cap I_2$. נשים לב שבכל הנק' שהן לא ב-I מקיימות $f\chi_E(x)=0$ ולכן

$$\int_{I_1} f\chi_E dx = \int_{I} f\chi_E dx = \int_{I_2} f\chi_E dx$$

הגדרה

תהי $E\subset\mathbb{R}^2$ קב' קבילה. אזי נגדיר מידת ז'ורדן של E ע"י $\mu(E)=\int_E dx$

הוכחה שההגדרה מוגדרת היטב



סכום עליון $S(\chi_E;P)=\sum_{I_j\cap E\neq\emptyset}\mu(I_j)$

סכום תחתון $s(\chi_E;P)=\sum\mu(I_j)$

נשאיף פרמטר חלוקה לאפס ונקבל שהם שווים.

לכן מידת ז'ורדן מוגדרת היטב.

לכן גם $\square$ קב' קבילה היא מדידה לפי ז'ורדן.

הגדרה

נאמר ש-E קב' בעלת מידה אפס לפי ז'ורדן אם לכל ε קיים מס' סופי של תיבות $\{I_j\}_{j=1}^{n}$ כך ש- $E\subset\bigcup_{j=1}^{n} I_j$ וגם $\sum_{j=1}^{n}\mu(I_j)<\varepsilon$

הגדרה

נאמר ש-E מדידה לפי ז'ורדן אם ∂E בעלת מידה אפס לפי ז'ורדן.

למה

יהיו f,g פונק' אינטגרביליות על קב' מדידה לפי ז'ורדן E.
ויהי $c\in\mathbb{R}$. אזי

א. $f+g$ אינטגרבילית על E וגם $\int_E (f+g)dx=\int_E f dx+\int_E g dx$

ב. cf אינטגרבילית על E וגם $\int_E (cf)dx=c\int_E f dx$

ג. אם $0\le f$ אז $\int_E f dx\ge 0$

מסקנה

יהיו f,g פונק' אינטגרביליות על E, אזי

א. אם $f\le g$ לכל $x\in E$ אז $\int_E f dx\le\int_E g dx$

ב. אם $m\le f\le M$ אז $m\,\mu(E)\le\int_E f dx\le M\,\mu(E)$

ג. אם $m=\inf_E f$ $M=\sup_E f$ אזי קיים $\theta\in[m,M]$ עבורו
$\int_E f dx=\theta\,\mu(E)$

3. אם E ק' מדידה וקשירה ו- $f:E\to\mathbb{R}$ רציפה אז קיימת נק' $\xi\in E$ עבורה $\int_E f dx=f(\xi)\mu(E)$

מסקנה

אם $0\le f$ ו- $\int_I f dx=0$ אז $f=0$ כמעט בכל מקום.

למה - אדיטיביות

יהיו קבוצות E_1,E_2 קב' מדידות ותהי f פונק' המוגדרת על $E_1\cup E_2$. אם $\mu(E_1\cup E_2)=0$ ו-f פונק' אינטגרבילית על E_1,E_2 $\Leftrightarrow$ f אינטגרבילית על $E_1\cup E_2$ ומתקיים

$$\int_{E_1\cup E_2} f dx=\int_{E_1} f dx+\int_{E_2} f dx$$

הוכחה

$$\chi_{E_1\cap E_2}(x)=\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)-\chi_{E_1\cup E_2}(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{E_1} f\,dx+\int_{E_2} f\,dx=\int_{E_1\cup E_2} f\,dx+\underbrace{\int_{E_1\cap E_2} f\,dx}_{=0}$$

כי $E_1 \cap E_2$ נגעו בשפתם הן ממידה 0.

למה

אם f אינטגרבילית על E אז $|f|$ אינטגרבילית על E ומתקיים

$$\left|\int_E f\,dx\right| \le \int_E |f|\,dx$$

משפט פוביני

יהיו $A\subset\mathbb{R}^n$, $B\subset\mathbb{R}^m$ תיבות ותהי f אינטגרבילית על $A\times B$. אזי האינטגרלים

$\int_B dy\left(\int_A f(x,y)dx\right)$ ו- $\int_A dx\left(\int_B f(x,y)dy\right)$ קיימים ושווים ל-

$$\iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy$$

הוכחה

נגדיר $F(x)=\int_B f(x,y)dy$ לכל $x\in A$. לכן

$$\int_A dx\left(\int_B f(x,y)dy\right)=\int_A F(x)dx=\int_A\int_B f(x,y)\,dy\,dx$$

תהי P_A חלוקה של A, P_B חלוקה של B

ונסמן $P=P_A\times P_B$, $P=\{A_i\times B_j : A_i\in P_A,\ B_j\in P_B\}$

$$s(f,P)=\sum_{i,j}\left(\inf_{\substack{x\in A_i\\ y\in B_j}} f(x,y)\right)m(A_i\times B_j)\le\sum_i \inf_{x\in A_i}\left(\sum_j \inf_{y\in B_j} f(x,y)\,m(B_j)\right)m(A_i)$$

$$\le\sum_i\left(\inf_{x\in A_i} \underline{I}(x)\right)m(A_i)$$

סכום דרבו תחתון של f תחת B, בהינתן x נתון

באופן דומה

$$S(f,P)=\sum_{i,j}\left(\sup_{\substack{x\in A_i\\ y\in B_j}} f(x,y)\right)m(A_i\times B_j)\ge\sum_i\left(\sup_{x\in A_i}\overline{J}(x)\right)m(A_i)$$

נשאיף את פרמטר החלוקה לאפס, ולכן נקבל

$$\int_A \underline{I}(x)\,dx = \int_A \overline{I}(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int_A \overline{I}(x) - \underline{I}(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$\overline{I}(x) = \underline{I}(x)$ כמעט בכל מקום

ומכאן נקבל שהאינטגרלים הדרושים אכן מתקיים

אינטגרלים

תוצאות משפט פוביני

(*) אם "$I\subset\mathbb{R}^n$" מוגדר ע"י $I=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ אז

$$\int_I f(x)dx=\int_{a_n}^{b_n}dx_n\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}dx_{n-1}\dots\int_{a_1}^{b_1}f(x_1,\dots,x_n)dx_1$$

(*) למשל $n=2$, $I=[a,b]\times[c,d]$:

$$\int_I f(x)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

דוגמאות

(*)

$$I=\int_0^1\int_0^1\frac{y}{(1+x^2+y^2)^{1.5}}dxdy$$

$$\int_0^1\frac{y}{(1+x^2+y^2)^{1.5}}dy=\frac12\int_{1+x^2}^{2+x^2}\frac{dt}{t^{1.5}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$$

$t=x^2+y^2+1$

$dt=2ydy$

$$I=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx=\left[\ln\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{2+x^2}}\right]_{x=0}^{1}=\ln\frac{2+\sqrt2}{1+\sqrt3}$$

דרך נוספת: ידוע ש-

$$\int\frac{1}{(a+x^2)^{1.5}}dx=\frac1a\cdot\frac{x}{\sqrt{a+x^2}}+C$$

לכן

$$\int_0^1\frac{1}{(1+y^2+x^2)^{1.5}}dx=\left[\frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+y^2+x^2}}\right]_{x=0}^{1}=\frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}}$$

לכן

$$I=\int_0^1\frac{y}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}}dy=\int_{\sqrt2}^{\sqrt3}\frac{dt}{t^2-1}=\left[\frac12\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{y=\sqrt2}^{\sqrt3}=$$

$t^2=2+y^2$

$tdt=ydy$

$$=\frac12\left(\ln\frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}-\ln\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2+1}\right)=$$

$$=\frac12\ln\frac{(\sqrt3-1)(\sqrt2+1)}{(\sqrt3+1)(\sqrt2-1)}=\frac12\ln\frac{2}{(\sqrt3+1)^2}\cdot\frac{(\sqrt2+1)^2}{1}=\ln\frac{2+\sqrt2}{1+\sqrt3}$$

וקיבלנו שהתשובות אכן שוות.

מסקנה ממשפט פוביני

תהי $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$ קב' מדידה ויהיו φ_1,φ_2 פונק' רציפות על D, $\varphi_1\le\varphi_2$. נגדיר $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{4}: x\in D,\ \varphi_1\le y\le\varphi_2\}$.

אם f אינטגרבילית על E אזי

$$\iint_E f(x,y)dxdy=\int_D dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$$

הוכחה

$$\partial E=\underbrace{\{(x,\varphi_1(x)):x\in D\}}_{\text{גרף של פונ' רציפה } \varphi_1 \text{ ולכן ממידה אפס}}\cup\underbrace{\{(x,\varphi_2(x)):x\in D\}}_{\text{גרף של פונ' רציפה } \varphi_2 \text{ ולכן ממידה אפס}}\cup\underbrace{\{(x,y):x\in\partial D,\varphi_1\le y\le\varphi_2\}}_{\text{ממידה אפס}}$$

לכן $m(\partial E)=0$

נקח $I=I_1\times I_2$ כך ש- $E\subset I$, אזי:

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy=\int_I f(x,y)\chi_E(x,y)\,dx\,dy=\int_{I_1}dx\int_{I_2}f\chi_E(x,y)\,dy=$$

$$=\int_{I_1}\chi_D(x)\,dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy=\int_D dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy$$

דוגמאות

* חשב $I=\iint_\Omega e^{x/y}\,dx\,dy$

Ω התחום ע"י $x=y^2$, $x=0$, $y=1$, כלומר

$$\Omega=\{(x,y):0\le x\le 1,\ \sqrt{x}\le y\le 1\}=\{(x,y):0\le y\le 1,\ 0\le x\le y^2\}$$

לכן

$$I=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y}\,dy=\int_0^1 dy\int_0^{y^2}e^{x/y}\,dx$$

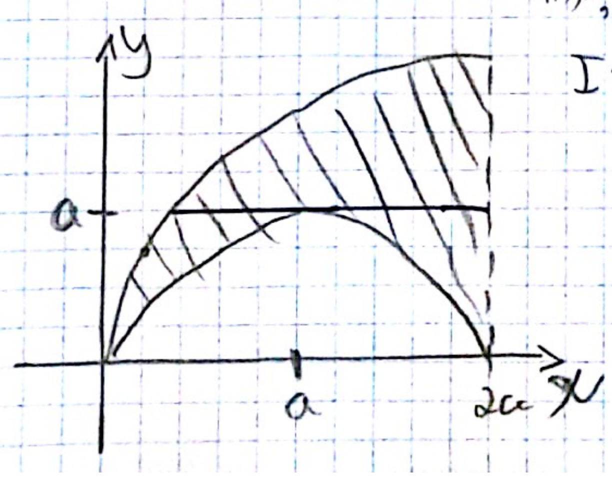
$$\int_0^{y^2}e^{x/y}\,dx=\left[ye^{x/y}\right]_{x=0}^{y^2}=ye^{y^2/y}-y=ye^y-y$$

$$I=\int_0^1(ye^y-y)\,dy=\underline{\underline{e-\tfrac{1}{2}}}$$

* תהי f אינטגרבילית. חשב $I=\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}F(x,y)\,dy$ $(a>0)$

התחום מקיים את תנאי המשפט.

האינטגרל, לאחר החלפת התחום יהיה:



$$I=\int_0^a dy\int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\,dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}F(x,y)\,dx$$

$$+\int_a^{2a}dy\int_{y^2/2a}^{2a}F(x,y)\,dx$$

$$\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^1 (xy)^{xy}\,dy \underset{y=t/x}{=} \int_0^1 dx\left(\frac{1}{x}\int_0^x t^t\,dt\right)= \qquad ⊛$$

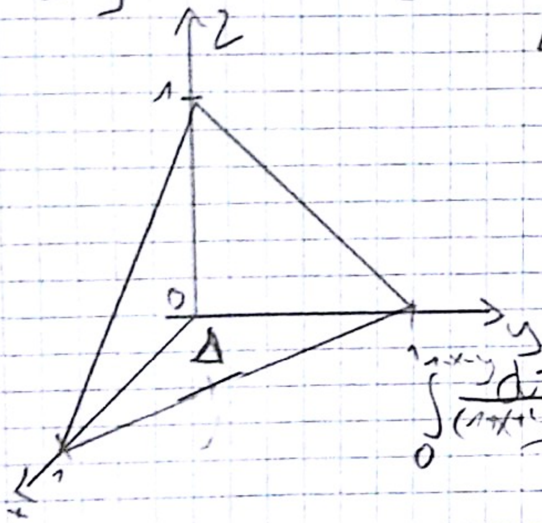
$$=\int_0^1 t^t\,dt\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx=\int_0^1 t^t \ln\frac{1}{t}\,dt=\int_0^1 \left(t^t-(t^t)'\right)dt=$$

$$(t^t)'=t^t\ln t+t^t$$
$$t^t\ln\frac{1}{t}=t^t-(t^t)'$$

$$=\int_0^1 t^t\,dt-\left[t^t\right]_{t=0}^1=\int_0^1 t^t\,dt=\int_0^1 y^y\,dy$$

⊛ חשב $I=\iiint_E \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$ כאשר E חסום ע"י המישורים

$x=0;\ y=0;\ z=0;\ x+y+z=1$



$$E=\{(x,y,z):(x,y)\in\Delta,\ 0\le z\le 1-x-y\}$$
$$\Delta=\{(x,y):0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$$

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dz$$

$$\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\right]_{z=0}^{1-x-y}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right)dy=\frac{1}{2}\cdot\left(\left[-\frac{1}{1+x+y}\right]_{y=0}^{1-x}-\frac{1}{4}(1-x)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1-x)\right)$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x\right)dx=\underline{\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)}$$

⊛

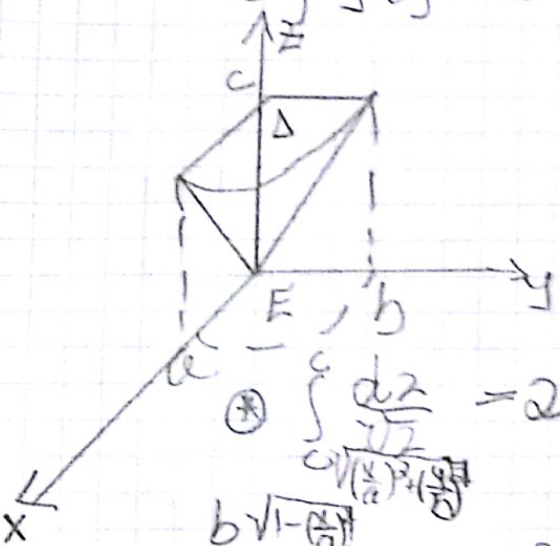
⊛

⊛

אינטגרלים

דוגמאות

⊛ חשב את $I=\iiint_\Omega \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dxdydz$ כאשר Ω תחום ע"י חרוט $(\frac{z}{c})^2=(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2$ והמישורים $x=0;\ y=0;\ z=c$



$\Omega=\{(x,y):(x,y)\in E,\ c\sqrt{(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2}\le z\le c\}$

$E=\{(x,y):(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2\le 1,\ x,y\ge 0\}$

$=\{0\le x\le a,\ 0\le y\le b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}\}$

⊛ $\int_{c\sqrt{(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2}}^{c}\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{c}\left(1-((\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2)^{0.25}\right)$

השאר הציבו על y

⊛ $2\sqrt{c}\int_0^{b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\left(1-((\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2)^{0.25}\right)y\,dy=\underbrace{\sqrt{c}\,b^2(1-(\frac{x}{a})^2)-J}_{\text{פתיחת סוגריים בתוך האינ'}}$

$J=2\sqrt{c}\int_0^{b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}y((\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2)^{0.25}dy=\left[\begin{matrix}t=(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2\\ dt=\frac{2}{b^2}y\,dy\end{matrix}\right]=$

$=b^2\sqrt{c}\int_{(x/a)^2}^{1}t^{1/4}dt=\frac{4}{5}b^2\sqrt{c}\left(1-(\frac{x}{a})^{2.5}\right)$

⊛ $I=b^2\sqrt{c}\int_0^a x\left(\frac{1}{5}-(\frac{x}{a})^2+(\frac{x}{a})^{2.5}\right)dx=\frac{a^2b^2\sqrt{c}}{36}$

דרך נוספת:

$\Omega=\{0\le z\le c,\ 0\le y\le\frac{bz}{c},\ 0\le x\le a\sqrt{(\frac{z}{c})^2-(\frac{y}{b})^2}\}$

⊛ $\int_0^{a\sqrt{(\frac{z}{c})^2-(\frac{y}{b})^2}}x\,dx=\frac{1}{2}a^2\left((\frac{z}{c})^2-(\frac{y}{b})^2\right)$

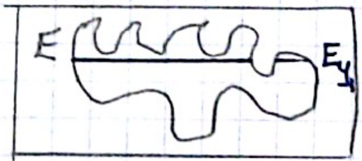
⊛ $\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{bz}{c}}\left((\frac{z}{c})^2-(\frac{y}{b})^2\right)y\,dy=\frac{1}{8}\frac{a^2b^2}{c^4}z^4$

⊛ $I=\frac{1}{8}\cdot\frac{a^2b^2}{c^4}\int_0^c z^{3.5}dz=\frac{a^2b^2\sqrt{c}}{36}$

הנה מסקנה ממשפט פוביני

תהי $I\subset\mathbb{R}^n$, $I=A\times B$ כאשר A תיבה ב-$\mathbb{R}^{n-1}$, ותהי $E\subset I$. תהי B הקבוצה E עבור $y\in B$ ויהי

$E_y=\{x\in A:(x,y)\in E\}$



מסקנה

אם E מדידה (לפי ז'ורדן) אז עבור כמעט כל $y\in B$ הקב' E_y גם מדידה (לפי ז'ורדן) ומתקיים

$$\mu_n(E)=\int_B \mu_{n-1}(E_y)\,dy$$

הוכחה

לכל y: $\chi_E(x,y)=\chi_{E_y}(x)$ ממשפט פוביני

$$\mu(E)\underset{\text{הגדרה}}{=}\iint_{A\times B}\chi_E(x,y)\,dx\,dy\underset{\text{פוביני}}{=}\int_B dy\int\chi_{E_y}(x)\,dx=\int_B\mu_{n-1}(E)\,dy$$

מסקנה - עקרון קוואלירי

יהיו $E,G\subset\mathbb{R}^3$ שתי קב' מדידות לפי ז'ורדן ו-

$E(c)=\{(x,y):(x,y,c)\in E\}$

ו- $G(c)=\{(x,y):(x,y,c)\in G\}$

אלו החתכים של E ו-G ע"י מישור $z=c$. אם לכל $c\in\mathbb{R}$ הקב' E ו-G מדידות (לפי ז'ורדן) ויש להן אותו שטח אז לקב' E ו-G יש אותו נפח.

דוגמה

כדור ברדיוס r: $B_r=\{x\in\mathbb{R}^n:\sum_{i=1}^n x_i^2\le r^2\}$

ונסמן נפח של כדור $V_n=\mu_n(B_r)$

ידוע $V_1=2r$, $V_2=\pi r^2$, $V_3=\frac{4}{3}\pi r^3$

כמו כן נגדיר פונק' גאמא ע"י $(a>0)$ $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$

וגם $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$ ולכן אם $n\in\mathbb{N}$: $\Gamma(n+1)=n!$

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

הסבר למה $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}=\left[x=y^2\right]=2\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$$

נוסחה:

$$V_n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}r^n$$

אם n זוגי אפשר גם לרשום

$$V_{2m}=\frac{\pi^m}{m!}r^{2m}$$

אם n אי זוגי אפשר גם לרשום:

$$\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}+1\right)=\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)=\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2m+1)}{2^{m+1}}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}}$$

$$(2m+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2m+1)$$

$$(2m)!!=2\cdot4\cdot6\cdots(2m)$$

$$\Downarrow$$

$$V_{2m+1}=\frac{2^{m+1}\cdot\pi^m}{(2m+1)!!}\cdot r^{2m+1}$$

נוכיח את הנוסחה

$$V_n=\int\cdots\int_{B_r}dx_1\cdots dx_n=\left[x_i=ry_i\right]=r^n\underbrace{\int\cdots\int_{\sum y_i^2\le1}dy_1\cdots dy_n}_{B_n=\mu_n(B_1)}$$

כלומר $V_n=B_nr^n$, נותר לחשב את B_n:

$$B_n=\int\cdots\int_{\sum y_i^2\le1}dy_1\cdots dy_n=\int_{-1}^1dy_n\int\cdots\int_{\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2\le1-y_n^2}dy_1\cdots dy_{n-1}=$$

$$=B_{n-1}\int_{-1}^1(1-y_n^2)^{\frac{n-1}{2}}dy_n$$

$$\Downarrow$$

$$B_n=\alpha_nB_{n-1}$$

נותר להראות מהו α_n, ונתק"מ: $\alpha_n=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}$

מכאן כנדרש:

$$B_n=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}B_{n-1}=\cdots=(\sqrt{\pi})^{n-1}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

נראה מהו α_n:

$$\alpha_n=2\int_0^1(1-y^2)^{\frac{n-1}{2}}dy=\left[\begin{matrix}y=(\frac{t}{1+t})^{0.5}\\dy=\cdots\end{matrix}\right]=\int_0^\infty\frac{1}{(1+t)^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

$$\frac{1}{(1+t)^{\frac{n+2}{2}}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{1}{(1+t)^{\frac{n}{2}+1}}\int_0^\infty e^{n/2}e^{-y}dx=\int_0^\infty x^{n/2}e^{-(1+t)x}dx$$

$$\alpha_n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} \int^{\infty} x^{\frac{n}{2}} e^{-(1+t)x} dx = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

ומכאן מקבלים את הדרוש!!

החלפת משתנים

ב- $\mathbb{R}$:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\Downarrow$$

אם $\varphi'(t)\neq 0$ לכל $t\in[a,b]$, $I=[a,b]$

נניח ש- φ עולה ממש $\varphi(I)=[\varphi(a),\varphi(b)]$

אז $\int_{\varphi(I)} f(x)dx=\int_I f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

אם φ יורדת ממש $\varphi(I)=[\varphi(b),\varphi(a)]$

אז באותו אופן $\int_{\varphi(I)} f(x)dx=-\int_I f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

$$\Downarrow$$

אם $\varphi'(t)\neq 0$ לכל $t\in I$; $\int_{\varphi(I)} f(x)dx=\int_I f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt$

משפט

יהיו $D\subset\mathbb{R}^2$, Ω קב' פתוחות, ותהי $\varphi:\Omega\to D$, $\varphi\in C^1(D)$

שהיא חח"ע ומקיימת $J\varphi(t)\neq 0$: $\forall t\in\Omega$

תהי f פונק' רציפה על D. אזי לכל קב' קומפקטית

ומדידה (לפי ז'ורדן) $A\subset\Omega$ מתקיים

$$\int_{\varphi(A)} f(x)dx=\int_A f(\varphi(t))|J\varphi(t)|dt$$

למה

אם $\varphi\in C^1(\Omega)$ ו- φ חח"ע, מתקיים:

$\varphi^{-1}\in C^1$ אמ"מ $J\varphi(t)\neq 0$ לכל $t\in\Omega$

הוכחה

($\Leftarrow$) לפי משפט הפונק' ההפוכה

($\Rightarrow$) $\varphi(\varphi^{-1}(x))=x$

נגזור ונקבל $\varphi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x)=I$ מט' יחידה

$$\underset{t=\varphi^{-1}(x)}{J\varphi(t)}\cdot J\varphi^{-1}(x)=1 \Leftarrow J\varphi(t)\neq 0$$

הוכחת המשפט

הנחה: φ חח"ע ורציפות בנ"ש על Ω

$0<c\le|J\varphi(t)|$ לכל $t\in\Omega$

אפשר לעשות זאת שכן קיימת הקבוצה G: G פתוחה, $A\subset G\subset\bar{G}\subset\Omega$. משום ש-$\Omega$ פתוחה לכל $x\in A$ קיימת קובייה פתוחה $\mathring{Q}_x\subset\Omega$. מתוך הכיסוי $\bigcup_{x\in A}\mathring{Q}_x$ של A, מקומפקטיות קיים תת כיסוי $A\subset G=\bigcup_{i=1}^{n}\mathring{Q}_i$, וזו הסיבה שאין ניתן להניח זאת.

למה: אם φ היא (מ"ש) C^1 דיפאומורפיזם אז לכל קב' מזערה (לפי ז'ורדן) וקומפקטית $A\subset\Omega$ הקב' $\varphi(A)$ גם מזערה.

סימון: $Q(t_0,\ell)$ קובייה שמרכזה ב-t_0 ואורך צלעה $=2\ell$.

הוכחה: $|\varphi_i(t)-\varphi_i(t_0)|=|\mathrm{grad}\,\varphi_i(S_i)\cdot(t-t_0)|\le n\rho(\varphi;Q)\ell$

S_i על הקטע שמחבר בין t ל-t_0 (מערך הביניים)

וכאשר $\rho(\varphi;Q)=\max_{1\le i\le n}\max_{S\in Q}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_j}(S)\right|$

ולכן גם $|\varphi_i(t)-\varphi_i(t_0)|\le M\ell$

ומתקיים $\varphi(Q(t_0,\ell))\subset Q(\varphi(t_0),M\ell)$.

הקב' מזערה ולכן קיים $\{Q_k\}_{k=1}^{p}$ עבורה $\partial A\subset\bigcup_{k=1}^{p}Q_k$ ו-

$$\sum_{k=1}^{p}\mu(Q_k)<\varepsilon$$

~~[illegible]~~ משוויון $\partial(\varphi(A))=\varphi(\partial A)$

$$\partial(\varphi(A))\subset\varphi\Big(\bigcup_{k=1}^{p}Q_k\Big)\subset\bigcup_{k=1}^{p}\varphi(Q_k)\subset\bigcup_{k=1}^{p}Q(\varphi(t_k),M\ell_{Q_k})$$

$$\sum_{k=1}^{p}\mu(Q(\varphi(t_k),M\ell_{Q_k}))=(M)^n\sum_{k=1}^{p}\mu(Q_k)<\varepsilon M^n$$

ולכן מזערה.

* נחזור להוכחה הכללית, ונוכיח קודם מקרה פרטי $f\equiv1$:

צ"ל $\mu(\varphi(A))=\int_A|J\varphi(t)|dt$

נוכיח את השוויון כאשר $\lambda:=\varphi$ היינו $x_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}t_i$

$$J\lambda=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

בעצם נרצה להוכיח:

למה: תהי Λ הע"ל עם $J\Lambda \neq 0$. אזי לכל קב' קומפקטית ומדידה לפי ז'ורדן $A\subset\mathbb{R}^n$ מתקיים $\mu(\Lambda(A)) = |J\Lambda|\mu(A)$

הוכחה: תהי $A=:I$ תיבה. לפי הגדרה של קב' מדידה:

יהי $\varepsilon>0$, אזי קיימים I_j J_j

עבורם $\bigcup_{j=1}^{p} I_j \subset A \subset \bigcup_{j=1}^{q} J_j$

$$\sum_{j=1}^{q}\mu(J_j)-\varepsilon < \mu(A) < \sum_{j=1}^{p}\mu(I_j)+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\bigcup_{j=1}^{p}\Lambda(I_j)\subset\Lambda(A)\subset\bigcup_{j=1}^{q}\Lambda(J_j)$$

$$\mu(\Lambda(A)) \leq \sum_{j=1}^{q}\mu(\Lambda(J_j)) = |J\Lambda|\sum_{j=1}^{q}\mu(J_j) < |J\Lambda|(\varepsilon+\mu(A))$$

$$\overset{\text{באותו אופן}}{\geq} |J\Lambda|(\mu(A)-\varepsilon)$$

סימונים:

העתקות אלמנטריות: R_{ij} מחליפה x_i, x_j בקואורדינטות; $|JR_{ij}|=1$

T_i^c מחליפה x_i ב-cx_i; $|JT_i^c|=|c|$

S_{ij} מחליפה x_i ב-x_i+x_j; $|JS_{ij}|=1$

ומעצם $\Lambda=\Phi_1\circ\Phi_2\circ\dots\circ\Phi_m$

הרכבה של פונק' אלמנטריות

$$\mu(\Lambda(A)) = |J\Phi_m|\,\mu(\Phi_1\circ\dots\circ\Phi_{m-1}(A)) = \prod_{j=1}^{m}|J\Phi_j|\,\mu(A) = |J\Lambda|\mu(A)$$

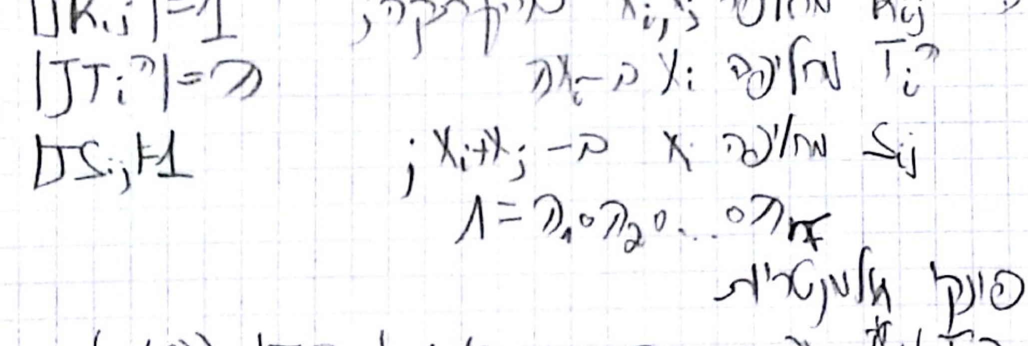
כנדרש!,

אבל נותר להוכיח עבור פונק' אלמנטריות

עבור T_i^c: $[a_i,b_i]\to[ca_i,cb_i]$

$\mu(T_i^c(I)) = |c|\mu(I)$

עבור S_{12}:



והשטח נשמר, באותו אופן עבור S_{ij} בכל מימד.

החלפת משתנים

המשך הוכחת המשפט

נניח ש- $f\ge 0$ (כי אז נקבל גם עבור כללי יהא f כללית על ידי $f=\max(f,0)+\min(0,f)$) ונניח גם ש-

$$\int_{\psi(B)} g(t)dt \le \int_B g(\psi(x))|J\psi(x)|dx$$

לכן נבחר $g(t)=f(\varphi(t))|J\varphi(t)|$ כאשר $\psi=\varphi^{-1}$, $B=\varphi(A)$

ומכאן נקבל $\int_A f(\varphi(t))|J\varphi(t)|dt \le \int_{\varphi(A)} f(x)dx$

לכן מ"ל $\int_{\varphi(A)} f(x)dx \le \int_A f(\varphi(t))|J\varphi(t)|dt$

נניח ש- $A=Q$ קוביה, אזי:

$$\int_{\varphi(Q)} f(x)dx = f(\varphi(t))\mu(\varphi(t)) \quad ; t\in Q$$

$$\int_Q f(\varphi(t))|J\varphi(t)|dt = f(\varphi(t'))|J\varphi(t')|\mu(Q) \quad ; t'\in Q$$

נרצה להראות ש- $\mu(\varphi(Q)) \approx |J\varphi(t)|\mu(Q)$

ובכן נראה שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- לכל $Q\subset\Omega$ כך ש- $diam(Q)<\delta$
מתקיים $\mu(\varphi(Q))\le(1+\varepsilon)\min_{t\in Q}|J\varphi(t)|\mu(Q)$

עבור $t\in Q$: (נסמן) $\Lambda_t=\varphi'(t)$ $\quad \psi_t(s)=\Lambda_t^{-1}\circ\varphi(s)$

ולכן מתקיים $\psi_t(Q)=\Lambda_t^{-1}(\varphi(Q))$

ועוד מתקיים $\mu(\psi_t(Q))=\mu(\Lambda_t^{-1}(\varphi(Q)))=|\det\Lambda_t^{-1}|\mu(\varphi(Q))$

$$\Downarrow$$

$$\mu(\varphi(Q))=|J\varphi(t)|\mu(\psi_t(Q))$$

קיבלנו ש- $\mu(\psi_t(Q))\le\rho(\psi_t;Q)^n\mu(Q)$

כאשר $\rho(\psi_t;Q)=\max_{1\le i\le n}\max_{s\in Q}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial(\psi_t)_i}{\partial t_j}(s)\right|$

כמו כן $\psi_t'(t)=(\Lambda_t^{-1})'\circ\Lambda_t=E$ יחידה

שכן $\psi_t'(s)=\underbrace{(\Lambda_t^{-1})'}_{\text{אינו תלוי}}(\varphi(s))\varphi'(s)$

נשאר כי לינארית Λ_t^{-1}

$$\left|\frac{\partial(\psi_t)_i}{\partial t_j}(s)-\underbrace{\frac{\partial(\psi_t)_{ij}}{\partial t_j}(t)}_{\le\sigma_{ij}}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\underbrace{a_{ik}(t)}_{\text{איברים של } A_t^{-1}}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial t_j}(s)-\frac{\partial\varphi_k}{\partial t_j}(t)\right)\right|$$

מהנחה $|a_{ik}(t)|\le 1$ והנגזרות החלקיות רציפות במ"ש נקבל שהביטוי מעלה חסום ע"י ε_1 שהוא קטן מאוד, ונבחר ε_1 כבורר ש-$1+\varepsilon \ge (1+\varepsilon_1)^n$ ומכאן נקבל את הנדרש.

והכן נניח ש- $Q=\bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ קוביות קטנות מאוד, ונקבל

$$\int_{\varphi(Q)} f(x)\,dx=\int_{\varphi(\bigcup_{i=1}^{k}Q_i)} f(x)\,dx=\int_{\bigcup_{i=1}^{k}\varphi(Q_i)} f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{k}\int_{\varphi(Q_i)} f(x)\,dx=$$

$$=\sum_{i=1}^{k} f(\varphi(t_i))\,\mu(\varphi(Q_i))\le(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{k} f(\varphi(t_i))\,|J\varphi(t_i)|\,\mu(Q_i)$$

$$\int_{\varphi(Q)} f(x)\,dx\le(1+\varepsilon)\int_{Q} f(\varphi(t))\,|J\varphi(t)|\,dt$$

נשאיף $\varepsilon\to 0$ ונקבל את הנדרש, מש"ל.

אפשרות נוספת להוכחה - באינדוקציה

ב-$\mathbb{R}$ המשפט טריוויאלי

נניח שהמשפט נכון במרחב $\mathbb{R}^{n-1}$ ונוכיח ב-$\mathbb{R}^n$.

נכון נניח ש-φ היא מהצורה

$$\varphi(t)=(\varphi_1(t),\dots,\varphi_{n-1}(t),t_n)$$

$$t=(t_1,\dots,t_n)$$

כאשר

ומכן אם $(t_1,\dots,t_{n-1},s)\in\Omega$ נקח $\varphi_s(t_1,\dots,t_{n-1})=(\varphi_i(t_1,\dots,t_{n-1},s))_{i=1}^{n-1}$

ומתקיים $|J\varphi(t_1,\dots,t_n)|=|J\varphi_{t_n}(t_1,\dots,t_{n-1})|$

נסמן $B=\varphi(A)$, $B(x_n)=\{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1};\ (x_i)_{i=1}^{n}\in B\}$

כל קבוצה חסומה ולכן קיים קטע $[a,b]\subset\mathbb{R}$ כך ש

לכל $(x_1,\dots,x_n)\in B$, $x_n\in[a,b]$ ומכאן:

$$\int_B f(x)\,dx\overset{\text{משפט פוביני}}{=}\int_a^b dx_n\int_{B(x_n)} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_{n-1}=$$

$$=\int_a^b dx_n\int_{\varphi_{x_n}^{-1}(B(x_n))} f((\varphi_i(t_1,\dots,t_{n-1},x_n))_{i=1}^{n-1},x_n)\,|J\varphi_{x_n}(t_1,\dots,t_{n-1})|\,dt_1\dots dt_{n-1}$$

$$\overset{\text{פוביני}}{=}\int_{\varphi^{-1}(B)=A} f(\varphi(t))\,|J\varphi(t)|\,dt$$

מסקנה

כעת עבור פונק' כללית: יהי $t_0 \in U$, מהנחות המשפט $J\varphi(t_0)\neq 0$ ולכן קיים i עבורו $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_n}(t_0)\neq 0$

נגדיר $\psi(t_1,\dots,t_n)=(t_1,\dots,t_{n-1},\varphi_i(t))$

$$|J_\psi(t_0)|=\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_n}(t_0)\right|\neq 0$$

ממשפט הפונק' ההפוכה קיימת סביבה U_{t_0} קיימת

$$\psi^{-1}:\psi(U_{t_0})\to U_{t_0} \qquad \theta:\psi(U_{t_0})\to\mathbb{R}^n$$

ומתקיים $\theta=\varphi\circ\psi^{-1}\Longrightarrow\varphi=\theta\circ\psi$

ולכן אם $B\subset\varphi(U)$

$$\int_B f(x)dx=\int_{\theta^{-1}(B)}f(\theta(u))|J_\theta(u)|du\underset{\text{מהנחת האינ' עבור }\psi}{=}\int_{\psi^{-1}(\theta^{-1}(B))}f(\theta(\psi(t)))|J\theta(\psi(t))||J\psi(t)|dt=$$

$$=\int_{\varphi^{-1}(B)}f(\varphi(t))|J\varphi(t)|dt$$

לכל $x\in\varphi(A)$ קיים כדור $B(x,r_x)$ כך שעל קב' קומפקטית ומדידה לפי ג'ורדן $K\subset B(x,r_x)$ המשפט נכון. $\varphi(A)\subset\bigcup_{x\in\varphi(A)}B(x,\frac{r_x}{3})$

כמו כן מקומפקטיות קיימים r_{x_i}, $1\le i\le k$:

$$\varphi(A)\subset\bigcup_{i=1}^{k}B(x_i,\tfrac{1}{3}r_{x_i})$$

ונסמן $r=\min_{1\le i\le k}r_{x_i}$. כמו כן קיימות P_j שעבורן: $\varphi(A)\subset\bigcup_{j=1}^{s}P_j$, $\operatorname{diam}P_j<\frac{r}{2}$

$$\int_{\varphi(A)}f(x)dx=\sum_{j=1}^{s}\int_{\varphi(A)\cap P_j}f(x)dx=\sum_{j=1}^{s}\int_{\varphi^{-1}(\varphi(A)\cap P_j)}f(\varphi(t))|J\varphi(t)|dt=\int_A f(\varphi(t))|J\varphi(t)|dt$$

<u>החלפה לקואורדינטות קוטביות</u>

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}\Longrightarrow J=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho$$

$$\int_{B(0,R)}f(x,y)dxdy=\int_0^R\int_0^{2\pi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\varphi\, d\rho$$

אומנם כאן לא חח"ע ב-$(0,0)$ אבל זו נק' יחידה ורציף שם ולכן כאן מוגדר.

החלפת משתנים

דוגמאות

$$I=\iint_\Omega e^{x^2+y^2}\,dxdy \quad \text{when} \quad \Omega=\{(x,y):\|(x,y)\|\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$$ (*)

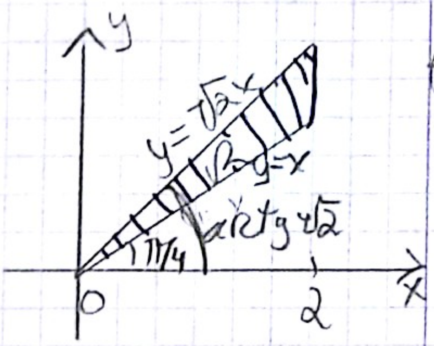
נכתוב $\Omega=\{(r,\varphi): 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}$

כאשר $x=r\cos\varphi \quad y=r\sin\varphi$

מקואורדינטות קוטביות:

$$I=\int_0^{\pi/2}du\int_0^1 e^{r^2}r\,dr=\frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{r^2}r\,dr=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}(e-1)$$

$$I=\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{2}x}F(\|(x,y)\|)\,dy=\iint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy$$ (*)



נסמן $x=r\cos\varphi \quad y=r\sin\varphi$

$$0\le r\cos\varphi\le 2 \Rightarrow 0\le r\le\frac{2}{\cos\varphi}$$

$$\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\arctg\sqrt{2}$$

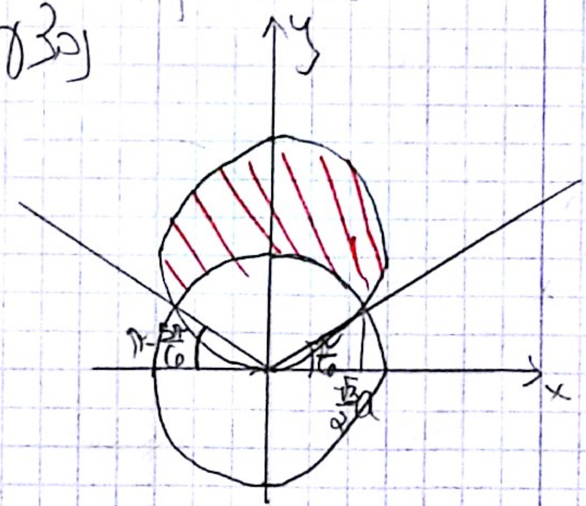
ולכן

$$I=\int_{\pi/4}^{\arctg\sqrt{2}}d\varphi\int_0^{2/\cos\varphi}f(r)\,dr$$

$$I=\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad \text{when} \quad D=\{(x,y):x^2+y^2\ge a^2;\ \underbrace{x^2+y^2\le 2ay}_{x^2+(y-a)^2\le a^2}\}$$ (*)

נבצע החלפה $x=r\cos\varphi \quad y=r\sin\varphi$

$$a\le r\le 2a\sin\varphi$$



$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ x^2+y^2=2ay\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\\ y=\frac{a}{2}\end{cases}$$

ומהשרטוט $\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{5\pi}{6}$

$$I=\int_{\pi/6}^{5\pi/6}d\varphi\int_a^{2a\sin\varphi}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr$$

$$I=\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}}\left|\frac{x+y}{2}-x^2-y^2\right|dxdy$$ (*)

נסמן

$$\Omega=\{x^2+y^2\le 1\}$$

$$\Omega_1=\left\{(x,y):\frac{x+y}{\sqrt{2}}>x^2+y^2\right\}$$

$$\Omega_2=\Omega\setminus\Omega_1$$

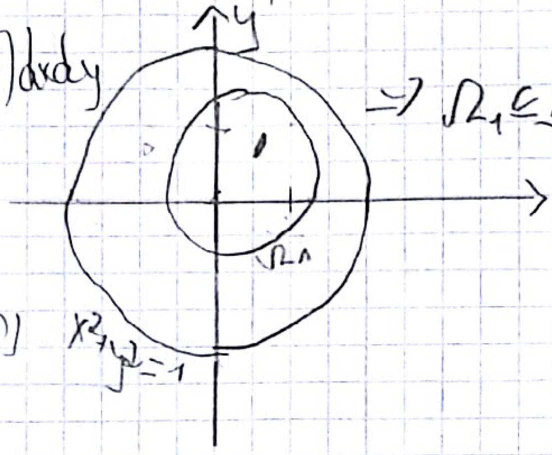
$$I=\iint_{\Omega\cap\Omega_1=\Omega_1}\left(\frac{x+y}{\sqrt2}-(x^2+y^2)\right)dxdy+\iint_{\Omega_2}\left((x^2+y^2)-\frac{x+y}{\sqrt2}\right)dxdy$$ חק

נמצא את Ω_1:

$$\Omega_1=\left\{(x,y):\left(x-\frac{1}{2\sqrt2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt2}\right)^2<\left(\frac12\right)^2\right\}$$

$$I=2\iint_{\Omega_1}\left(\frac{x+y}{\sqrt2}-(x^2+y^2)\right)dxdy+\iint_{\Omega}\left(x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt2}\right)dxdy$$ $\to \Omega_1\subseteq\Omega$

$$=2I_1+I_2$$



נחשב I_1:

נחליף

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2\sqrt2}+r\cos\varphi\\ y=\frac{1}{2\sqrt2}+r\sin\varphi\end{cases}$$ $0\le r\le\frac12$, $0<\varphi<2\pi$

$$I_1=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{0.5}\Big[\underbrace{\frac{\frac{2}{2\sqrt2}+r\cos\varphi+r\sin\varphi}{\sqrt2}}_{\text{אינטגרל של חלק כזה ייתן } 1/2}-\left(\left(\frac{1}{2\sqrt2}+r\cos\varphi\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt2}+r\sin\varphi\right)^2\right)\Big]r\,dr=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{0.5}\Big[\frac12-\Big(\frac14+r^2+\underbrace{\frac{1}{\sqrt2}r\cos\varphi+\frac{1}{\sqrt2}r\sin\varphi}_{\text{ייתן אפס}}\Big)\Big]r\,dr=$$

$$=2\pi\int_0^{0.5}\left(\frac14 r-r^3\right)dr=2\pi\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\right)=\frac{\pi}{32}$$

עבור I_2, נחליף: $x=r\cos\varphi$ $y=r\sin\varphi$

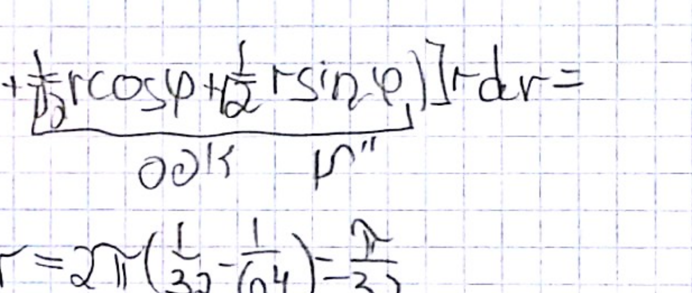
$$I_2=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(r-\frac{r\cos\varphi+r\sin\varphi}{\sqrt2}\right)r\,dr=\frac{\pi}{2}$$

נחבר ונקבל $I=\underline{\underline{\frac{9\pi}{16}}}$

(ⅹ) נרצה למצוא את השטח שחסום ע"י (170) $(x^2+y^2)^2=2ax^3$

$$x^4\le(x^2+y^2)^2=2ax^3\Rightarrow x\le 2a$$

$$y^4\le(2a)^4\Rightarrow |y|\le 2a$$



אם נציב $x=r\cos\varphi$ $y=r\sin\varphi$

נקבל את העקום $r=2a\cos^3\varphi$

תחום זה סימטרי נחשב רק עבור הרבע הראשון

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

$$S=2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2a\cos^3\varphi}r\,dr=4a^2\int_0^{\pi/2}\cos^6\varphi\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^3d\varphi=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\Big(1+\underbrace{3\cos2\varphi}_{\text{אינטגרל}=0}+3\cos^2 2\varphi+\underbrace{\cos^3 2\varphi}_{\text{אינטגרל}=0}\Big)d\varphi=$$

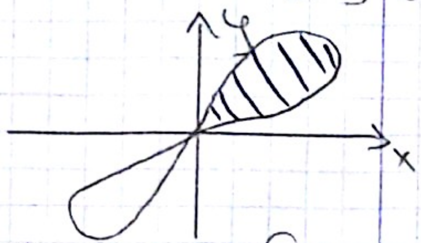
$$=\frac{\pi}{16}+\frac{3}{8}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos4\varphi}{2}d\varphi=\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{32}=\frac{5\pi}{32}$$

$$S=\frac{5a^2}{8}\pi$$

ולכן

✱ נחפש את השטח התחום ע"י העקום

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\right)^2=\frac{xy}{c^2}$$



$x=ar\cos\varphi \qquad y=br\sin\varphi$

$r^4=\frac{ab}{c^2}r^2\cos\varphi\sin\varphi$

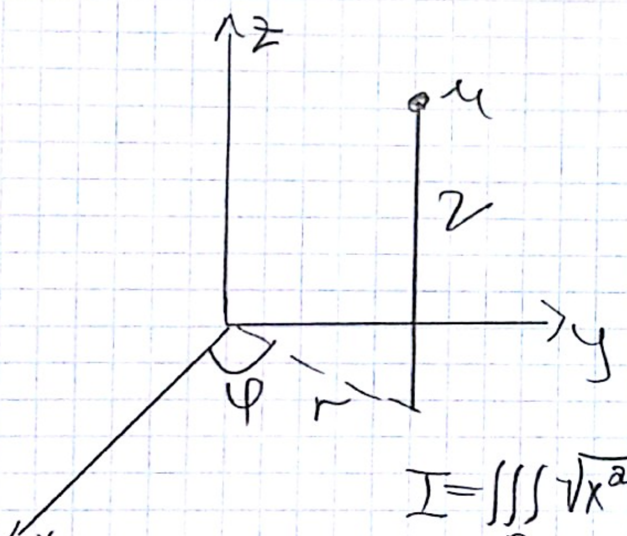
$r^2=\frac{ab}{c^2}\cos\varphi\sin\varphi$

והיעקוביאן יהיה abr

מסימטריה נחשב עבור התחום העליון

$$S=2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{ab\sin\varphi\cos\varphi}{c^2}}}abr\,dr=\frac{(ab)^2}{c^2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\ldots=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}\right)^2$$

קואורדינטות גליליות



$x=r\cos\varphi$

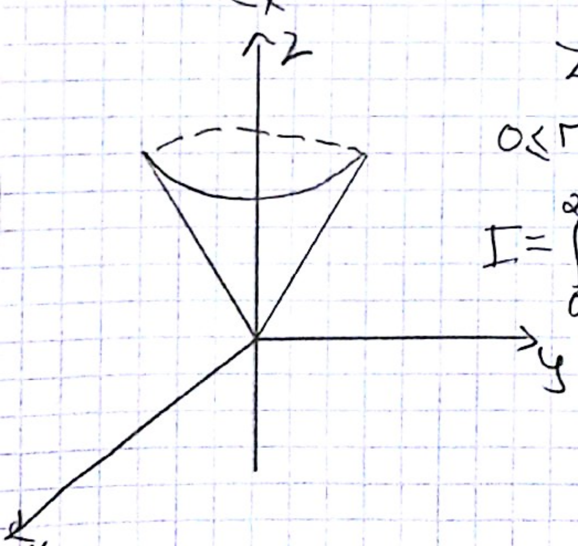
$y=r\sin\varphi$

$z=z$

$J=r$

דוגמאות

✱ $$I=\iiint_A\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$$



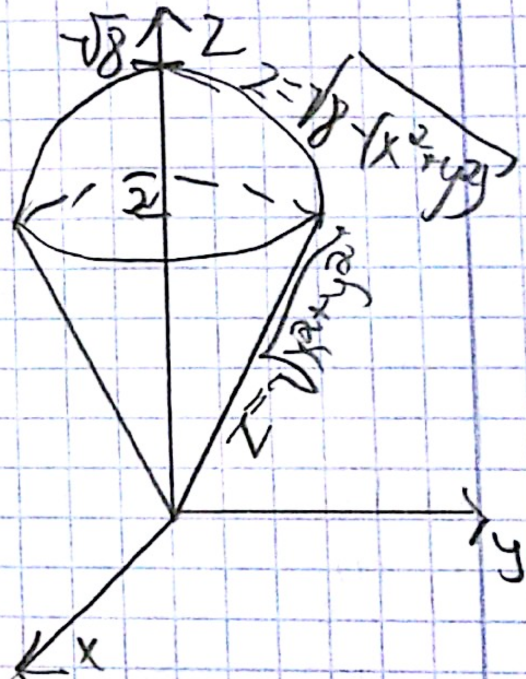
A תחום ע"י $z=1;\ z=\sqrt{x^2+y^2}$

$0\le r\le1 \qquad 0\le\varphi\le2\pi \qquad r\le z\le1$

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1dr\int_r^1r^2dz=2\pi\int_0^1(r^2-r^3)dr=\frac{\pi}{6}$$

* נפח של התחום החסום ע"י $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $x^2+y^2+z^2=8$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$



נבצע החלפה לקואורדינטות גליליות

$$0\le\varphi\le 2\pi$$

$$0\le r\le 2$$

$$r\le z\le\sqrt{8-r^2}$$

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 dr\int_r^{\sqrt{8-r^2}} r\,dz=2\pi\int_0^2\left(r\sqrt{8-r^2}-r^2\right)dr=\frac{32}{3}\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$$

<u>קואורדינטות ספריות</u>

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta \quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta \quad z=\rho\cos\varphi$$

$$\rho\ge 0 \qquad 0\le\varphi\le\pi \qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$|J|=\rho^2\sin\varphi$$

החלפת משתנים באינטגרלים

דוגמאות

$$I=\iiint_{\{x^2+y^2+z^2\le z\}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

נחליף

$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$

$y=\rho\sin\varphi\sin\theta \qquad z=\rho\cos\varphi$

כאשר

$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \qquad 0\le\theta\le 2\pi \qquad 0\le\rho\le\cos\varphi$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\varphi}\rho\cdot\underbrace{\rho^2\sin\varphi}_{\text{יעקוביאן}}\,d\rho\, d\varphi\, d\theta=\frac{2\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\sin\varphi\, d\varphi=\frac{\pi}{10}\left[-\cos^5\varphi\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{10}$$

$$I=\iiint_{\{a^2\le x^2+y^2+z^2\le 2az\}} z\,dxdydz$$

נחליף שוב לקואורדינטות כדוריות, ונקבל

$a^2\le\rho^2\le 2a\rho\cos\varphi \Rightarrow a\le\rho\le 2a\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi\ge\frac{1}{2}$

$0\le\theta\le 2\pi \qquad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$

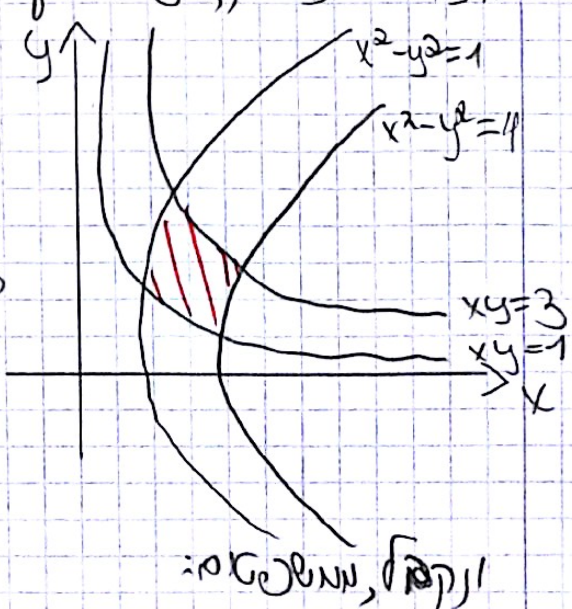
$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_a^{2a\cos\varphi}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi=\frac{2\pi}{4}\int_0^{\pi/3}a^4(16\cos^4\varphi-1)\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\underset{t=\cos\varphi}{=}$$

$$=\frac{\pi}{2}a^4\int_{0.5}^{1}(16t^4-1)t\,dt=\ldots=\frac{9\pi}{8}\cdot a^4$$

$$I=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy \qquad (x,y\ge 0)$$

נתחום D התחום ע"י

$x^2-y^2=4 \qquad x^2-y^2=1 \quad xy=3 \quad xy=1$



$1\le x^2-y^2\le 4 \qquad 1\le xy\le 3$

נקח העתקה φ עבור החלפת משתנים:

$u=xy \qquad v=x^2-y^2$

העתקה D חח"ע ברביע הראשון עם

$$\varphi^{-1}:\begin{cases}2x^2=(4u^2+v^2)^{0.5}+v\\2y^2=(4u^2+v^2)^{0.5}-v\end{cases}$$

נסמן $P=[1,3]\times[1,4]$ אז

ונקבל, ממשפטים:

$$\int_D f=\int_{\varphi^{-1}(P)}f=\int_P f(\varphi^{-1})\,|J\varphi^{-1}|$$

$$|J\varphi| = \left\| \begin{matrix} y & x \\ 2x & -2y \end{matrix} \right\| = 2(x^2+y^2) \Longrightarrow |J\varphi^{-1}| = \frac{1}{2(4u^2+v^2)^{0.5}}$$

ערך מוחלט על הדטרמיננטה

$$\int_D f = \iint_P (4u^2+v^2)^{0.5} \cdot \frac{1}{2(4u^2+v^2)^{0.5}}\,du\,dv = \frac{1}{2}\cdot \iint_P du\,dv = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$$

שטח של P

אינטגרלים לא אמיתיים

הגדרה

נאמר שסדרה של קבוצות מדידות (לפי ז'ורדן) $\{E_n\}$ מכסה מונוטונית את הקבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ אם לכל i: $E_i\subset E_{i+1}$ וגם $E=\bigcup_i E_i$

הגדרה

תהי f פונקציה אינטגרבילית על כל תת קבוצה מדידה (לפי ז'ורדן) של הקבוצה E. אם לכל כיסוי מונוטוני $\{E_n\}$ של E קיים גבול סופי

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)dx$$

והגבול הנ"ל אינו תלוי בבחירת $\{E_n\}$ אזי הוא נקרא אינטגרל לא אמיתי של f על E.

למה

תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה מדידה (לפי ז'ורדן) ויהי $\{E_n\}$ כיסוי מונוטוני של E. אזי:

א. הגבול $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu(E)$

ב. אם f אינטגרבילית אזי קיים שוויון בין האינטגרל האמיתי ללא אמיתי, כלומר

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)dx$$

הוכחה

ראשית נראה א $\Leftarrow$ ב:

$$\left|\int_E f(x)dx-\int_{E_n} f(x)dx\right|=\left|\int_{E\setminus E_n} f(x)dx\right|\underset{\substack{f \text{ אינטג' ולכן חסומה}}}{\le} M\mu(E\setminus E_n)=M(\mu(E)-\mu(E_n))\xrightarrow{n\to\infty}0$$

נוכיח את (א) (בעצם א נובע שמידת ז'ורדן היא רציפה):

ובנוסף לכל n: $E_n\subset E_{n+1}\subset E$

ולכן $\mu(E_n)\le\mu(E_{n+1})\le\mu(E)$

נקבל שהסדרה $\mu(E_n)$ עולה וחסומה ולכן מתכנסת ומכאן $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)\le\mu(E)$. נרצה להראות את הכיוון השני.

יהי $\varepsilon>0$, ויהי Δ איחוד של מס' סופי של תיבות פתוחות המכסות את ∂E, ונסמן $\tilde{E}=E\cup\Delta$, ונבחר $\mu(\Delta)<\varepsilon$

ומתקיים גם $E \subset \tilde{E} = E \cup \Delta$

כמו כן נבנה באותו אופן $\tilde{E}_n = E_n \cup \Delta_n$ כך ש- $\mu(E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

נתבונן על סדרת הקב' $\Delta, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \ldots$

$$E \subset \Delta \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{E}_i\right)$$

בפרט קיים $m \in \mathbb{N}$ עבורו $\tilde{E} \subset \Delta \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} \tilde{E}_i\right)$

$$E \subset \tilde{E} \subset \Delta \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i\right) \cup E_m$$

לכן $\mu(E) \le \mu(\Delta) + \sum_{i=1}^{m} \mu(\Delta_i) + \mu(E_m) \le 2\varepsilon + \mu(E_m)$

נשאיף $m \to \infty$ ונקבל $\mu(E) \le \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ כפי שרצינו!!

משפט

תהי $f: E \to \mathbb{R}$ אי שלילית. אם קיים כיסוי מונוטוני עבורו $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx = A$ קיים אז האינט' $\int_E f(x)dx$ מתכנס.

הוכחה

יהי $\{E_i'\}$ כיסוי מונוטוני אחר, נסמן $E_n^i = E_n \cap E_i'$

$$B := \lim_{i\to\infty} \int_{E_i'} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n^i} f(x)dx \le \lim \int_{E_n} f(x)dx = A$$

זה סימטרי ולכן $B = A$.

דוגמה

$$I = \iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad [f(x,y) = \sin(x^2+y^2) = \sin(x^2)\cos(y^2) + \cos(x^2)\sin(y^2)$$

ניקח הקטע $D = ([0,n])^2$:

$$I = \lim_{n\to\infty} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\left(\int_0^\infty \sin(x^2)dx\right)\left(\int_0^\infty \cos(y^2)dy\right)$$

ושני האינט' הנ"ל מתכנסים לפי דיריכלה, כמו שראינו

$$\iint_{\substack{\{x^2+y^2 \le n^2\} \\ x,y \ge 0}} f(x,y) \underset{\text{קוטביות}}{=} \int_0^{\pi/2}\int_0^n r\sin(r^2) = \frac{\pi}{4}(1-\cos(n^2))$$

אבל כאן הגבול לא קיים.

לכן האינט' הלא אמיתי מתבדר, וזה מתקבל על הדעת כי f לא מקיימת את תנאי המשפט.