תרגול 12 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

ינואר 2016

1 העתקות לינאריות

הגדרה 1.1. יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. **העתקה לינארית** $T:V\to W$ היא פונקציה המקיימת:

1. לכל $v_1,v_2\in V$, $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$.
2. לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ ולכל $v\in V$, $T(\alpha v)=\alpha T(v)$.

הערה 1.2 (קריטריון מקוצר להעתקה לינארית). $T:V\to W$ היא העתקה לינארית אם לכל $v_1,v_2\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$,

$$T(\alpha v_1+v_2)=\alpha T(v_1)+T(v_2)$$

הערה 1.3. אם $T:V\to W$ העתקה לינארית, אזי $T(0_V)=0_W$.

דוגמה 1.4.

1. ההעתקה $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת לפי $T(x)=2x$ היא העתקה לינארית. הוכחה: לכל $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$T(\alpha x_1+x_2)=2(\alpha x_1+x_2)=\alpha\cdot(2x_1)+2x_2=\alpha T(x_1)+T(x_2)$$

2. ההעתקה $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת לפי $T(x)=2x+1$ אינה העתקה לינארית, כי $T(0)=1\neq 0$.

3. ההעתקה $T:\mathbb{Q}_2[x]\to\mathbb{Q}$ המוגדרת לפי $T(p(x))=p(1)$ היא העתקה לינארית. הוכחה: לכל $\alpha\in\mathbb{Q}$ ולכל $p(x),q(x)\in\mathbb{Q}_2[x]$,

$$T(\alpha p(x)+q(x))=\alpha p(1)+q(1)=\alpha T(p(x))+T(q(x))$$

4. תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. ההעתקה $L_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ הנתונה על ידי $L_A(v)=Av$ היא העתקה לינארית. הוכחה: לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ ולכל $v_1,v_2\in\mathbb{F}^n$,

$$L_A(\alpha v_1+v_2)=A(\alpha v_1+v_2)=\alpha Av_1+Av_2=\alpha L_A(v_1)+L_A(v_2)$$

5. העתקת הזהות $I : V \to V$ היא העתקה לינארית.

6. העתקת האפס $0 : V \to V$, $0(v) = v$, היא העתקה לינארית.

משפט **1.5** (משפט ההגדרה). יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. יהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V, ויהיו $w_1, \ldots, w_n \in W$ וקטורים כלשהם (לאו דווקא שונים). אזי קיימת העתקה לינארית יחידה $T : V \to W$ שעבורה $T(v_i) = w_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.

הערה 1.6.

1. אם הקבוצה $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בת"ל ולא בסיס, קיימת העתקה לינארית כזו, אבל היא לא יחידה.

2. אם הקבוצה $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ת"ל, צריך לבדוק כל מקרה לגופו.

תרגיל 1.7. בדקו בכל סעיף האם קיימת העתקה לינארית T המקיימת את הדרישות, והאם היא יחידה:

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$$

2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ המקיימת

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\9\end{pmatrix} = x + x^2, \qquad T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 1 - 2x + \pi x^2$$

3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

פתרון. ניעזר במשפט ההגדרה.

1. הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס של $\mathbb{R}^2$, ולכן קיימת העתקה לינארית יחידה כזו.

2. הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל ב-$\mathbb{R}^3$ אך היא לא בסיס שלה, ולכן קיימת העתקה לינארית T המקיימת את הדרישות, אבל היא לא יחידה. הסבר: אפשר להשלים את הקבוצה הזו לבסיס באינסוף דרכים, ולכן יש אינסוף העתקות לינאריות כאלו. למשל, אפשר להוסיף $\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, ואז תהיה העתקה לינארית יחידה כזו.

3. נוכיח שאין העתקה לינארית כזו. נשים לב כי

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

נניח בשלילה ש-T העתקה לינארית. נפעיל את T על שני האגפים, ונקבל

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}=\\ &= T\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

בסתירה. לכן אין העתקה לינארית T כזו.

אילו היינו משנים את הדרישה האחרונה ל- $T\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$, לא הייתה בעיה והיו אינסוף העתקות לינאריות כאלו.

תרגיל 1.8. מצאו במפורש העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ המקיימת

$$T(1-x)=2+x,\qquad T(1+x)=x-2x^2,\qquad T\left(2+x^2\right)=1$$

פתרון. ניקח וקטור כללי $a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x]$, ונביע אותו כצירוף לינארי של $\{1-x,1+x,2+x^2\}$: מחפשים $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ שעבורם

$$\begin{aligned}\alpha(1-x)+\beta(1+x)+\gamma\left(2+x^2\right) &= a+bx+cx^2\\ (\alpha+\beta+2\gamma)+(-\alpha+\beta)x+\gamma x^2 &= a+bx+cx^2\end{aligned}$$

נשים במטריצה ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&a\\-1&1&0&b\\0&0&1&c\end{array}\right)\xrightarrow{R_2+R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&a\\0&2&2&a+b\\0&0&1&c\end{array}\right)\xrightarrow[R_2-2R_3\to R_3]{R_1-2R_3\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a-2c\\0&2&0&a+b-2c\\0&0&1&c\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a-2c\\0&1&0&\frac{a+b}{2}-c\\0&0&1&c\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{a-b}{2}-c\\0&1&0&\frac{a+b}{2}-c\\0&0&1&c\end{array}\right)$$

לכן

$$a+bx+cx^2=\left(\frac{a-b}{2}-c\right)(1-x)+\left(\frac{a+b}{2}-c\right)(1+x)+c\left(2+x^2\right)$$

נפעיל את T על שני האגפים ונקבל

$$\begin{aligned}
T\left(a+bx+cx^{2}\right) &= T\left(\left(\frac{a-b}{2}-c\right)(1-x)+\left(\frac{a+b}{2}-c\right)(1+x)+c\left(2+x^{2}\right)\right)= \\
&= \left(\frac{a-b}{2}-c\right)T(1-x)+\left(\frac{a+b}{2}-c\right)T(1+x)+cT\left(2+x^{2}\right)= \\
&= \left(\frac{a-b}{2}-c\right)(2+x)+\left(\frac{a+b}{2}-c\right)\left(x-2x^{2}\right)+c= \\
&= (a-b-c)+(a-2c)\,x+(a+b-2c)\,x^{2}
\end{aligned}$$

וזו אכן העתקה לינארית הממלאת את הדרישות.

הגדרה 1.9. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית.

1. **הגרעין** של T הינו $\ker T=\{v\in V|T(v)=0\}$.
2. **התמונה** של T הינה $\mathrm{Im}T=\{T(v)|v\in V\}$.
3. **הדרגה** של T הינה $\mathrm{rank}\,(T)=\dim\mathrm{Im}T$.

משפט **1.10.** $\ker T\leq V$, $\mathrm{Im}T\leq W$.

דוגמה 1.11. תהי $T:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}^{2}$ ההעתקה הלינארית המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\y-x\end{pmatrix}$$

נחשב את $\ker T$:

$$\begin{aligned}
\ker T &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3}\middle|T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3}\middle|\begin{pmatrix}x-y\\y-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}= \\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3}\middle|x-y=0\ \wedge\ y-x=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\\z\end{pmatrix}\middle|x,z\in\mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

נחשב את $\mathrm{Im}T$: $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathrm{Im}T\iff$ קיים $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3}$ שעבורו $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\iff$ $\begin{pmatrix}x-y\\y-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\iff a=-b$. לכן

$$\mathrm{Im}T=\left\{\begin{pmatrix}a\\-a\end{pmatrix}\middle|a\in\mathbb{R}\right\}$$

שימו לב ש-$\dim\ker T+\dim\mathrm{Im}T=2+1=3=\dim\mathbb{R}^{3}$, ולא במקרה:

משפט **1.12** (משפט הדרגה). תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית. אזי

$$\dim\ker T+\dim \mathrm{Im}T=\dim V$$

הערה **1.13**. תהי $T=L_A$ ההעתקה הלינארית שראינו קודם. אזי:

1. $\ker T=N\left(A\right)$.
2. $\mathrm{Im}T=C\left(A\right)$.
3. $\mathrm{rank}\left(T\right)=\mathrm{rank}\left(A\right)$.

תרגיל 1.14. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, ותהי $S=\left\{v_1,\ldots,v_k\right\}$ קבוצה. הוכיחו כי

$$T\left(\mathrm{Span}\left(S\right)\right)=\mathrm{Span}\left(T\left(S\right)\right)$$

הוכחה. $\boxed{\subseteq}$ יהי $v\in T\left(\mathrm{Span}\left(S\right)\right)$. לכן קיים $v'\in\mathrm{Span}\left(S\right)$ שעבורו $T\left(v'\right)=v$. $v'\in\mathrm{Span}\left(S\right)$, כלומר קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}$ שעבורם

$$v'=\sum_{i=1}^{k}\alpha_iv_i\Rightarrow v=T\left(v'\right)=T\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_iv_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_iT\left(v_i\right)\in\mathrm{Span}\left(T\left(S\right)\right)$$

$\boxed{\supseteq}$ יהי $v\in\mathrm{Span}\left(T\left(S\right)\right)$. נשים לב כי $T\left(S\right)=\left\{T\left(v_1\right),\ldots,T\left(v_k\right)\right\}$. לכן קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}$ שעבורם

$$v=\sum_{i=1}^{k}\alpha_iT\left(v_i\right)=T\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_iv_i\right)\in T\left(\mathrm{Span}\left(S\right)\right)$$

$\square$

מסקנה **1.15**. אם B בסיס של V, אזי

$$\mathrm{Im}T=\mathrm{Span}\left(T\left(B\right)\right)$$

דוגמה 1.16. תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ההעתקה הלינארית המוגדרת על ידי

$$T\left(v\right)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\end{pmatrix}v$$

חשבו את $\ker T$, את $\mathrm{Im}T$ ואת $\mathrm{rank}T$.

פתרון. נניח כי $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker T$. לכן

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

זו מערכת משוואות; אם נשים במטריצה, נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

נסמן $z=t$, ולכן הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} -2t \\ t \\ t \end{pmatrix}$. לכן

$$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

כדי לחשב את $\mathrm{Im}T$, ניקח את הבסיס $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, ונסתכל על התמונות שלו.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\mathrm{Im}T = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$$

לכן $\mathrm{rank}T = \dim \mathrm{Im}T = 2$.